

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

13. Band, Heft 7 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 289—336

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Wajsberg, M.: Untersuchung über Unabhängigkeitsbeweise nach der Matrizenmethode. *Wiadom. mat.* 41, 33—70 (1936).

Eine zu aussagenlogischen Unabhängigkeitsbeweisen dienende Matrix \mathfrak{M} (s. dies. Zbl. 13, 97) wird entscheidungsdefinit genannt, wenn man ein Verfahren kennt, für jede vorgegebene aussagenlogische Formel in endlich vielen Schritten zu entscheiden, ob sie in \mathfrak{M} stets einen ausgezeichneten Wert erhält (ob sie \mathfrak{M} „erfüllt“). Verschiedene wichtige Klassen entscheidungsdefiniter unendlicher Matrizen werden abgegrenzt. — Aus der Gesamtheit der — offenbar entscheidungsdefiniten — endlichen Matrizen werden mehrere Matrizenklassen ausgesondert, für die bei vorgegebener Aussage α sich leicht diejenigen Matrizen der betr. Klasse angeben lassen, die von α erfüllt werden.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Curry, H. B.: A mathematical treatment of the rules of the syllogism. *Mind* 45, 209—216 (1936).

Der Autor gibt eine axiomatische Begründung der Syllogismen (unter Zugrundelegung einer mehr-als-zweiwertigen Booleschen Algebra). Eine „Kategorie“ zweistelliger Aussagenfunktionen — der „ f -Funktionen“ — wird durch folgende Postulate eingeführt: Mit $f(a, b)$ ist $\sim f(a, b)$ [sowie $f(b, a)$ und $f(a, -b)$] f -Funktion; jede f -Funktion ist entweder affirmative (d. h. $f(a, a)$ ist immer wahr) oder negative ($f(a, -a)$ immer wahr), nicht beides; für jede f -Funktion ist entweder $f(0, b)$ immer wahr oder $f(1, b)$ immer wahr. Die Syllogismen werden definiert als die Formeln der Gestalt $f_1(a, b) \cdot f_2(b, c) \cdot \supset \cdot f_3(a, c)$. Nach Herleitung einiger allgemeiner Sätze wird das Schema der acht f -Funktionen $(\pm a)(\pm b) \equiv 0$ betrachtet; in seinem Rahmen lassen sich 96 Syllogismen herleiten.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Tarski, Alfred: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia Philos.* (Comment. Soc. Philos. Polon., Leopoli) 1, 261—405 (1935).

Betreffs der Hauptergebnisse der nunmehr in deutscher Sprache erschienenen Arbeit, über die der Autor 1932 eine Mitteilung herausgab, kann auf dies. Zbl. 4, 1 verwiesen werden. Die Konstruktion einer „formal korrekten und sachlich zutreffenden semantischen Definition des Ausdrucks „wahre Aussage““ wird zunächst für den Klassenkalkül ausgeführt und sodann auf „formalisierte Sprachen“ beliebiger „endlicher Ordnung“ (Stufenzahl) erweitert. Diese Definition ist dem von Carnap (unabhängig) aufgestellten „Gültigkeitskriterium“ (dies. Zbl. 12, 145) in mancher Hinsicht analog; statt von dem syntaktischen Begriff der ziffernmäßigen „Bewertung“ geht jedoch Tarski von dem — in bestimmter Weise präzisierten und vereinheitlichten — semantischen Begriff des „Erfülltseins einer Aussagefunktion durch Gegenstände“ aus. Sein Wahrheitskriterium besteht auch für Aussagen mit deskriptiven Zeichen. Das negative Ergebnis des Hauptteils bezüglich der Möglichkeit einer Wahrheitsdefinition in „Sprachen unendlicher Ordnung“ ist im Nachwort durch den Übergang zu „Sprachen variabler Ordnung“ überwunden (dieser Übergang wird bei Falllassen einer dem Hauptteil zugrundeliegenden, den Begriff der semantischen Kategorie betreffenden Forderung ermöglicht).

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Waismann, Friedrich: Über den Begriff der Identität. *Erkenntnis* 6, 56—64 (1936).

Eine Kritik der in der formalen Logik vielfach herangezogenen Interpretation der Identität als „Übereinstimmung in allen Eigenschaften“. „Die Frage, ob zwei Dinge identisch sind, ist gar nicht die, ob sie sich unterscheiden, sondern ob es Sinn hat zu fragen, ob sie sich unterscheiden.“ (Einleitend wird an verschiedenartigen

Beispielen dargelegt, inwiefern die Sinnhaftigkeit einer solchen Fragestellung von der jeweiligen Einstellung abhängen könne). *Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

Hertz, Paul: Kritische Bemerkungen zu Reichenbachs Behandlung des Humeschen Problems. Erkenntnis 6, 25—31 (1936).

Reichenbach, Hans: Warum ist die Anwendung der Induktionsregel für uns notwendige Bedingung zur Gewinnung von Voraussagen? Erkenntnis 6, 32—40 (1936).

P. Hertz erhebt Einwände gegen die von H. Reichenbach in seinem Buche „Wahrscheinlichkeitslehre“ (dies. Zbl. 10, 364) entwickelte Theorie des Induktionschlusses. Er weist auf die Unvereinbarkeit des dort herangezogenen mathematischen Konvergenzbegriffes mit den Bedürfnissen der praktischen Anwendung hin, für die selbstverständlich nur ein beschränkter Zeitabschnitt — etwa die Dauer des menschlichen Lebens — zur Verfügung steht. Er bestreitet auch, daß der Induktionsschluß die einzig mögliche Methode für erfolgreiche Voraussagen darstelle, und konstruiert Gegenbeispiele. — H. Reichenbach weist in seiner Erwiderung darauf hin, daß der erste Einwand auf eine bereits von ihm selbst formulierte Bedingung für die Anwendbarkeit des Induktionsverfahrens zurückgeführt werden kann, während der zweite durch den Beweis entkräftet werden soll, daß auch die übrigen, möglichen Voraussagemethoden nur in Induktionsschlüssen ihre Rechtfertigung finden. — Schließlich geht R. auf den Fall von Folgen ein, deren Häufigkeit keinem Limes zustrebt, aber doch in irgendeiner bestimmbar Weise schwankt. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Strauß und Torney, Lothar von: Der Analogiebegriff in der modernen Physik. Erkenntnis 6, 1—24 (1936).

Historische Untersuchung der Rolle qualitativer und exakter Analogien in der Entwicklung der neueren Physik. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

Algebra und Zahlentheorie.

Sprague, R.: Über mathematische Kampfspiele. Tôhoku Math. J. 41, 438—444 (1936).

Kampfspiele sind Spiele, bei denen eine Anfangstellung nach einer beschränkten Anzahl von abwechselnden Zügen zweier Personen in eine Endstellung übergeführt wird, die keinen Zug mehr zuläßt und den Sieg einer der beiden Personen ergibt. Ein bekanntes Kampfspiel ist das Spiel „Nim“ (s. über dieses etwa W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, 2. Aufl., I. Bd., S. 72—88). Hier werden nun Gesamtspiele betrachtet, d. h. Spiele, bei denen mehrere Kampfspiele nebeneinander geführt und bei jedem Zug irgendeines von diesen um einen Zug zu fördern ist. Die Theorie derartiger Spiele wird entwickelt; sie stützt sich auf die von Ch. L. Bouton gegebene Theorie des Spiels „Nim“, indem jedes solche Gesamtspiel als ein verallgemeinertes „Nim“ erscheint. *L. Schrutka* (Wien).

Motzkin, Th.: Sur les transformations qui n'augmentent pas le nombre des variations du signe. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 894—897 (1936).

Ist $(x) = x_1, x_2, \dots, x_n$ eine reelle Zahlenfolge und $v(x)$ die Anzahl ihrer Vorzeichenwechsel, so sucht der Verf. alle rechteckigen Matrizen A , für welche stets gilt: $v(xA) \leq v(x)$. Diese Aufgabe wurde schon von Schoenberg [Math. Z. 32, 321—328 (1930)] für den Fall gelöst, daß die Zeilen von A unabhängig sind. — Der Verf. gibt eine vollständige Lösung dieser Aufgabe. Indem er nämlich einmal alle x_i bis auf eine und sodann alle x_i bis auf zwei gleich Null setzt, erhält er: Damit $v(x) = 0$ stets $v(xA) = 0$ nach sich ziehe, ist notwendig und hinreichend, daß entweder alle Elemente von A von demselben Vorzeichen sind oder alle Zeilen von A proportional sind und je ein festes Vorzeichen behalten. — Dann erhält er für umkehrbare Matrizen unmittelbar, daß ihre Minoren der Ordnung $m - 1$ dasselbe Vorzeichen haben, falls stets $v(xA) \leq v(x)$ gilt. — Indem der Verf. dieses Ergebnis noch und für allgemeinere Matrizen erweitert, erhält er endlich: Damit stets $v(xA) \leq v(x)$ gilt, ist notwendig

und hinreichend, daß alle Minoren i -ter Ordnung von A ($i < r$, wo r der Rang von A ist) ein nur von i abhängendes Vorzeichen haben, während das Vorzeichen der Minoren r -ter Ordnung nur von der Kombination der Zeilen von A abhängt, die diesen Minor enthalten.

N. Tschebotarow (Kasan).

Schoenberg, I. J.: Extensions of theorems of Descartes and Laguerre to the complex domain. Duke math. J. 2, 84—94 (1936).

L'auteur s'occupe de la généralisation du règle des signes de Descartes pour les racines imaginaires des équations, en élargissant un théorème d'Obrechhoff [C. R. 177, 102 (1923)] au cas des coefficients complexes. Soit $(1) f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$, $a_0 a_n \neq 0$, une équation à coefficients complexes. Dans le plan de Gauss on marque les points $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, et deux droites A et A_1 qui passent par l'origine O , et qui divisent le plan en quatre secteurs A, B, C, D consécutifs avec la propriété: chacun des secteurs A et C ne contient pas des points a_v . Dans la suite $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, en passant consécutivement les membres nous comptons le nombre $v_a(S)$ des passages du secteur B vers D et vice-versa, ce que l'auteur appelle le nombre des variations de la dite suite respectivement le double secteur $S = (A, C)$ séparatif. Désignons par ψ l'ouverture de A ou C . L'auteur démontre le théorème I. Le nombre des racines de l'équation (1) dont les arguments se trouvent dans l'intervalle $(-\psi/n, \psi/n)$ ne surpasse pas le nombre $v_a(S)$. Il étend ce théorème pour les zéros de la fonction

$$F(x) = a_0 e^{\lambda_0 x} + a_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + a_n e^{\lambda_n x} (\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n).$$

Ensuite il donne aussi une généralisation remarquable d'un théorème de Laguerre (Oeuvres 1, 41) concernant les zéros de la fonction

$$F(x) = a_0/x - \alpha_0 + a_1/x - \alpha_1 + \dots + a_n/x - \alpha_n (\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_n; a_v \text{ réels } \neq 0), \quad (2)$$

en démontrant le théorème: II. Désignons par $v(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$ le nombre des variations des signes de la suite $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Si

$\sum_0^n a_v \neq 0$ le nombre des zéros de la fonction (2) dont la partie réelle est $\geq \alpha_0$ ne surpasse pas le nombre $v(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$. Si $\sum_0^n a_v = 0$ on a le même résultat pour les zéros dont la partie réelle est $> \alpha_0$.

N. Obrechhoff (Sofia).

Montel, Paul: Sur les bornes des modules des zéros des polynomes. Tôhoku Math. J. 41, 311—316 (1936).

Verf. zeigt, daß die verschiedenen neueren oberen Schranken (von Takahashi, Kimura, Marty, Mandelbrojt und Montel, dies. Zbl. 3, 194; 5, 4, 341; 9, 216 bzw. 6, 6 u. 11, 50) für die absoluten Beträge des Polynoms $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ mit einem allgemeinen Satze (von Kuniyeda, Tôhoku Math. J. 9, 167; 10, 187) in engem Zusammenhange stehen. Dieser Satz hat bei Verf. die Form: Bezeichnen $A_0, A_1, \dots, A_n, 0$ die Punkte $1, a_1, a_2, \dots, a_n, 0$ der komplexen Ebene und l_0, l_1, \dots, l_n die Längen der Strecken $A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_n 0$ und ist $L_m^m = l_0^m + l_1^m + \dots + l_n^m$,

so ist $M_m = \left[1 + \frac{l_0^{m-1}}{L_m^{m-1}} \right]^m$ ($m > 1$) eine obere Schranke der absoluten Beträge der Nullstellen von $P(x)$. Im Falle $m = 1$ läßt sich M_m durch $M_1 = L_1$ ersetzen. Die Arbeit enthält außerdem einige Verschärfungen der behandelten Sätze. Sz. Nagy.

Potron: Sur l'irréductibilité des polynomes à plusieurs variables. Bull. Soc. Math. France 63, 226—230 (1935).

Verf. bezeichnet als $H(n, k)$ den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz für Polynome von k Veränderlichen, unter denen man n Veränderlichen Zahlenwerte zuschreibt. Er stellt sich die Aufgabe, $H(1, k)$ allgemein zu beweisen, wenn man $H(1, 2)$ für normale Polynome als bewiesen annimmt. Dazu ordnet er den Veränderlichen x_2, x_3, \dots, x_k eine Veränderliche y zu nach der lexikographischen Methode von Kronecker: $y_i = y^{k-i}$ und erhält aus $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ein Polynom $f(x_1, y)$. Jedem Faktor $p(x_1, y)$ von f entspricht dann ein ganz bestimmter Faktor P von F . Ist aber $pq - f = 0$, so folgt $PQ - F = 0$ noch nicht daraus. — Verf. teilt die Faktoren p von f in zwei Kategorien

ein, je nachdem ihre Koeffizienten zum Körper $K(x_1)$ gehören oder nicht. Für die Faktoren erster Kategorie ist die entsprechende Gleichung $PQ - F = 0$ sicher nicht identisch erfüllt und verwandelt sich in mehrere Gleichungen in x_1 , so daß man ihre Lösungen ausschließen muß. Für die Faktoren zweiter Kategorie stellt der Verf. eine „allgemeine“ Galoissche Resolvente $R(x_1, v)$ der von den mehrfachen Wurzeln befreiten Gleichung $f(x_1, y) = 0$ auf. Es genügt, der Veränderlichen x_1 Werte zuzuschreiben, die $R(x_1, v)$ irreduzibel lassen. Dazu ist $H(1, 2)$ für normale Gleichungen notwendig.

N. Tschebotarow (Kasan).

Petri, K.: Über die Diskriminante ternärer Formen. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1935, 471—484 (H. 3).

Ist f eine allgemeine ternäre Form vom Grade n , so gibt es genau eine zum System der ersten Polaren von f apolare kontravariante Form vom Grade $3n - 6$, welche π heißt. Für π werden zwei verschiedene Determinantendarstellungen angegeben. Ist Δ die Hessesche Form, so ist die $(3n - 6)$ -te Überschiebung

$$(\Delta, \pi)^{3n-6} = D$$

die Diskriminante von f , deren Verschwinden notwendig und hinreichend für die Existenz eines Doppelpunktes ist. Dann und nur dann ist $\pi \neq 0$, wenn f keine höhere Singularität und höchstens einen Doppelpunkt hat. Im Fall eines Doppelpunktes δ mit der Gleichung $\delta = 0$ ist $\pi = \delta^{3n-6}$. Auch für den Fall höherer Singularitäten werden die zu den ersten Polaren von f apolaren Formen vom Grade $3n - 6$ diskutiert und zu den Lösungen der Gleichung

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 = 0$$

in Beziehung gesetzt, wobei f_1, f_2, f_3 die Ableitungen von f sind. *van der Waerden.*

Tôya, Tikara: Resultantentheorie bei Formen in mehreren homogenen Reihen von Variablen. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 3, 33—43 (1936).

Die Mertens-Hurwitzsche Resultantentheorie wird auf Formen in 2 homogenen Variablenreihen $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m$ übertragen. Das Verschwinden aller Trägheitsformen der Formen f_1, \dots, f_r ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer nichttrivialen Nullstelle. Im Fall $r < m + n - 1$ gibt es keine Trägheitsform; im Fall $r = m + n - 1$ gibt es eine, durch die alle anderen teilbar sind: die Resultante. Sie ist eine homogene irreduzible Form in den Koeffizienten der gegebenen Formen f_1, \dots, f_{m+n-1} . Ihr Grad wird nach unten abgeschätzt. *van der Waerden.*

Weitzenböck, R.: Über den Begriff „projektive Invariante“. Mh. Math. Phys. 43, 15—19 (1936).

Eine „freie Form“ ist eine Form $F(x_1, \dots, x_n)$ mit unbestimmten Koeffizienten a . Sind die Koeffizienten durch Gleichungen gebunden, so spricht man von einer gebundenen Form; ist das Gleichungssystem außerdem invariant, so heißt F invariant-gebunden. Ist nun $J(a)$ eine Invariante einer invariant-gebundenen Form F , d. h. ist bei einer linearen Transformation T , bei der die a in \bar{a} übergehen, $J(a) = M(T) \cdot J(\bar{a})$ identisch in T , so ist notwendig M eine Potenz der Transformationsdeterminante. Ferner ist nach einem Satz von Deruyts $J(a)$ gleich einer Invariante einer freien Form. Dasselbe gilt nun, wie hier gezeigt wird, auch für nichtinvariant-gebundene Formen, wenn man ausdrücklich voraussetzt, daß M eine Potenz der Transformationsdeterminante ist. Der Beweis wird mit Hilfe des Ω -Prozesses geführt. *van der Waerden.*

Mori, Shinziro: Einige Eigenschaften primärer Integritätsbereiche. J. Sci. Hiroshima Univ. A 6, 55—67 (1936).

Let J denote a domain of integrity (commutative and containing an identity element) in which every ideal is primary and the Teilerkettensatz for ideals holds, then either J is a field or J contains just one prime ideal \mathfrak{p} ($\neq (0)$) [see the author's note, J. Sci. Hiroshima Univ. 5, 132 (1935); this Zbl. 12, 194]. In the latter case let J^* denote the ring of elements algebraically integral with respect to J and lying in the quotient field of J . The units of J^* and the elements of its minimal radical \mathfrak{r}^*

[the ideal composed of all elements nilpotent with respect to every ideal ($\neq (0)$) in J^*] are characterized in terms of polynomials in J of which they are roots. A necessary and sufficient condition that $r^* = p$ is found; also one under which p is an ideal in both J^* and J and divides every ideal having this property. The minimal radical r^* of J^* is a prime ideal provided every element of J^* not in r^* is a unit. *J. L. Dorroh.*

Teichmüller, Oswald: Über die Struktur diskret bewerteter perfekter Körper. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. 1, 151—161 (1936).*

Hasse und Schmidt haben (dies. Zbl. 8, 52) konstruktive Sätze über diskret bewertete perfekte Körper aufgestellt, die hier auf neue einfachere Weise bewiesen werden, welche die Konstruktion der diskret perfekt bewerteten Körper in expliziterer Form als bei Hasse-Schmidt ergibt. Es handelt sich darum, einen diskret perfekt bewerteten Körper K von seinem Restklassenkörper \mathfrak{K} her aufzubauen. χ bedeute die Charakteristik. Im Falle $\chi(K) = \chi(\mathfrak{K})$ ist nach Hasse-Schmidt K Potenzreihenkörper in \mathfrak{K} , das läuft darauf hinaus, daß in jeder Restklasse, d. h. in jedem \mathfrak{K} -Element a ein K -Element a so angegeben werden kann, daß die a einen (zu \mathfrak{K} isomorphen) Körper in K bilden. Für $\chi(K) = \chi(\mathfrak{K}) = 0$ ist das mit dem Hasse-Schmidtschen Verfahren einfach und übersichtlich zu beweisen. Den anderen Fall $\chi(K) = (\mathfrak{K}) = p \neq 0$ behandelt Verf. zunächst gemeinsam mit dem charakteristikkongruenten Fall $\chi(K) = 0$, $\chi(\mathfrak{K}) = p \neq 0$. Zuerst sei \mathfrak{K} vollkommen. Dann gibt es in jedem a ein a_0 so, daß $a_0 b_0 = (ab)_0$ — multiplikatives Repräsentantensystem. Man nehme nämlich in $a_n = a^{p^{-n}}$ irgendein α_n und setze $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n+k}^{p^k} = a_n^-$. Man sieht ganz leicht, daß a_n^-

von der Wahl der α_n unabhängig eindeutig bestimmt ist. Daraus folgt sofort $(ab)_0^- = a_0^- b_0^-$. Ist $\chi(K) = p$, so schließt man genau so $a_0^- + b_0^- = (a+b)_0^-$, das multiplikative Repräsentantensystem ist also ein mit \mathfrak{K} isomorpher, übrigens eindeutig bestimmter (im Gegensatz zu $\chi(K) = (\mathfrak{K}) = 0$) Körper in K , womit dieser Fall erledigt ist. Im Fall $\chi(K) = 0$ ist R nicht additiv abgeschlossen. Sei zunächst K unverzweigt, d. h. p Primelement von K . Dann ist jedes K -Element eindeutig in

eine Reihe $\sum_{n=v}^{\infty} a_n p^n$, a_n aus R entwickelbar. Zur Ausführung von Addition und Multi-

plikation an diesen Reihen fehlt eine Regel wie $(a+b)_0$ zu bilden ist, wenn a und b aus R stammen. Verf. beweist im Anschluß an H. L. Schmid und E. Witt, daß es zu festem p eine eindeutig bestimmte Folge ganzzahliger homogener Polynome $h_n(x, y)$ mit folgender Eigenschaft gibt: a und b seien Elemente aus dem Repräsentantensystem R . Sei $c_n^{p^n} = h_n(a, b)$, c_n der R -Repräsentant von $c_n^{p^n}$. Dann ist $a + b = \sum c_n p^n$. Damit ist die Addition der Repräsentanten und also die Addition und die Multiplikation im System der Reihen $\sum a_n p^n$, a_n aus R eindeutig rechnerisch bestimmt. Es gibt also (bis auf analytische Isomorphie) genau einen diskret perfekt bewerteten Körper K der Charakteristik 0 zu vorgegebenem vollkommenem Restklassenkörper \mathfrak{K} der Charakteristik $p \neq 0$. Bei verzweigtem K ist die Gesamtheit der Potenzreihen $\sum a_n p^n$, a_n aus R ein diskreter perfekter unverzweigter Teilkörper K' , der wegen der Einzigkeit des multiplikativen Repräsentantensystems eindeutig bestimmt ist. K ist dann Eisensteinscher Körper über K' . Der Fall eines unvollkommenen \mathfrak{K} wird dadurch erledigt, daß K in einen unverzweigten Erweiterungskörper L mit vollkommenem Restklassenkörper \mathfrak{L} eingebettet wird. *Deuring (Leipzig).*

Akizuki, Yasuo: Eine homomorphe Zuordnung der Elemente der galoisschen Gruppe zu den Elementen einer Untergruppe der Normklassengruppe. *Math. Ann. 112, 566 bis 571 (1936).*

Die Arbeit schließt an eine Arbeit von T. Nakayama an (dies. Zbl. 12, 390), ihr Hauptergebnis wurde dort schon erwähnt. Die Bezeichnungen seien die des angegebenen Referates. \mathfrak{N} sei ein Normalteiler von \mathfrak{G} , der die Kommutatorgruppe \mathfrak{G}' umfaßt. Zu \mathfrak{N} gehöre der Teilkörper \bar{K} von K . $\mathfrak{F}_{\bar{K}}(R, (a))$ bezeichne die Restklasse

von $F(R, (a))$ nach der Gruppe $N_{\bar{K}/k}^*$ der von Null verschiedenen Normen aus \bar{K} nach k . Dann ist $R \rightarrow \mathfrak{F}_{\bar{K}}(R, (a))$ eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ in $k^*/N_{\bar{K}/k}^*$, vorausgesetzt, daß (a, K, \mathfrak{G}) den Exponenten $(K:k)$ hat. Für p -adisches k und $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}'$ wird $N_{\bar{K}/k}^* = N_{K/k}^*$, also $R \rightarrow \mathfrak{F}(R, (a))$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$. Für die Beweise werden Regeln über verschränkte Produkte entwickelt, die in allgemeinerer Form schon von E. Witt (dies. Zbl. 12, 148) angegeben worden sind. *Deuring* (Leipzig).

Siegel, Carl Ludwig: Mittelwerte arithmetischer Funktionen in Zahlkörpern. Trans. Amer. Math. Soc. 39, 219—224 (1936).

$f(\xi)$ sei für alle ganzen Zahlen ξ eines reellen quadratischen Zahlkörpers K erklärt. ξ werde der Punkt mit den Koordinaten ξ und ξ' (konjugierte Zahl) zugeordnet. Es handelt sich um asymptotische Entwicklungen von Summen $F = \sum_{\xi \in G} f(\xi)$ für in gewisser Weise unendlich werdende Gebiete G . Verf. betrachtet speziell solche $f(\xi)$, für die es eine Einheit $\varepsilon \neq \pm 1$ in K mit $f(\varepsilon \xi) = f(\xi)$ für alle ξ gibt und für die $|f(\xi)| |\xi \xi'|^{-c} < \text{konst.}$ bei passendem $c > 0$ für alle $\xi \neq 0$ gilt. ξ und η sollen assoziiert heißen, wenn $\xi \eta^{-1}$ eine Potenz von ε ist. Unter diesen Voraussetzungen ist

$$\Phi_k(s) = \sum' f(\xi) (\xi \xi')^{-s} \left(\frac{\xi}{\xi'} \right)^{\frac{\pi i k}{\log \varepsilon}}$$

(über alle nicht assoziierten ξ) für $\sigma > c + 1$ absolut konvergent. G sei jetzt das Rechteck $0 < \xi x < 1, 0 < \xi' x' < 1, x > 0, x' > 0$. Dann ist

$$g(x, x') = \sum_{\substack{0 < \xi x < 1 \\ 0 < \xi' x' < 1}} f(\xi) (1 - \xi x)^{r-1} (1 - \xi' x')^{r-1} = \\ \frac{1}{2\pi i \log \varepsilon} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (xx')^{-s} \left(\frac{x}{x'} \right)^{\frac{\pi i k}{\log \varepsilon}} B\left(r, s - \frac{\pi i k}{\log \varepsilon}\right) B\left(r, s + \frac{\pi i k}{\log \varepsilon}\right) \Phi_k(s) ds,$$

(B = Eulersche B -Funktion) was darauf hinausläuft, daß die rechte Seite die Fouriersche Reihe von $g(x, x')$ als Funktion der durch $x = u\varepsilon^v, x' = u\varepsilon^{-v}$ erklärten Variablen v ist. Für $r = 2$ folgt aus dieser Formel für $F(v, v') = \sum f(\xi)$ und $s_k = s - ik/\log \varepsilon, s'_k = s + ik/\log \varepsilon$ die Formel

$$\int_0^y \int_0^{y'} F(x + v, x' + v') dv dv' = \\ = \frac{1}{2\pi i \log \varepsilon} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(x+y)^{s_k+1} - x^{s_k+1}}{s_k(s_k+1)} \frac{(x'+y')^{s'_k+1} - x'^{s'_k+1}}{s'_k(s'_k+1)} \Phi_k(s) ds, \quad (1)$$

die zur Koeffizientensummenformel für Dirichlet-Reihen analog ist und wie diese zur asymptotischen Entwicklung der linken Seite verwendet werden kann, falls $\Phi_k(s)$ über $\sigma = c$ hinaus nach links fortsetzbar ist (Anwendung des Residuensatzes). Allgemeinere G nähert man durch Rechtecksummen an; die vom Verf. ohne Beweis angegebene Formel

$$F = \sum_{\xi \in G} f(\xi) = \frac{1}{2\pi i \log \varepsilon} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_k(s) \left(\iint_G x^{s_k-1} x'^{s'_k-1} dx dx' \right) ds$$

die für solche G gilt, die im ersten Quadranten liegen und durch rektifizierbare Kurven begrenzt sind, ist praktisch unbrauchbarer als die erste Formel. Verf. benutzt (1), um den Mittelwert der Anzahl $\tau(\xi)$ der nichtassozierten positiven Teiler von ξ zu berechnen. $\Phi_k(s)$ wird dann das Quadrat einer Heckschen Zetafunktion mit Größencharakter von K . Die erwähnte Methode des Residuensatzes liefert in einer vom Teilerproblem der ganzen rationalen Zahlen her bekannten Weise das Resultat

$$\sum_{\substack{a \leq \xi \leq b \\ a' \leq \xi' \leq b'}} \tau(\xi) = \iint \left(\frac{\log \varepsilon}{d} \log(uu') + \frac{2\gamma}{\sqrt{d}} \right) du du' + O\left((bb')^{\frac{2}{3+\delta}}\right).$$

ε ist die total positive Fundamenteleinheit, d die Diskriminante und γ das konstante Glied in der Entwicklung nach Potenzen von $(s-1)$ der Hauptklassenzetafunktion $\zeta'(\xi\xi')^{-s}$, ξ über alle nichtassoziierten total positiven ganzen Zahlen. Diese Formel läßt sich auf allgemeinere Bereiche als $a \leq \xi \leq b$, $a' \leq \xi' \leq b'$ übertragen.

Deuring (Leipzig).

Pisot, Charles: Sur une propriété caractéristique de certains entiers algébriques. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 892—894 (1936).

Sind $\varrho, \varrho_1, \dots, \varrho_k$ konjugierte reelle ganze algebraische Zahlen und ist $|\sigma| > 1$, $|\varrho_k| \leq \theta < 1$, so ist $|\varrho^n - a_n| \leq k \cdot \theta^n$, wo a_n die zu ϱ^n nächstliegende ganze Zahl bedeutet. Denn $s_n = \varrho^n + \varrho_1^n + \dots + \varrho_k^n$ ist ganz rational. Mit anderen Worten, der Bruchteil von ϱ^n strebt mit n schneller nach Null als die Glieder einer geometrischen Progression. — Gilt umgekehrt für eine reelle Zahl ϱ $|\varrho^n - a_n| \leq C\theta^n$, $\theta < 1$, für alle n , so ist ϱ ganz algebraisch. Das folgt daraus, daß die ganzzahlige Potenzreihe $\sum a_n z^n = \sum \varrho^n z^n - \sum (\varrho^n - a_n) z^n$ eine innerhalb $|z| < \frac{1}{\theta}$ meromorphe Funktion bildet, die nach einem Satze von Borel [Bull. Soc. Math. **18**, 22 (1894)] eine rationale Funktion ist. — Ein analoger Satz gilt, falls ϱ komplex ist und a_n eine Gaußsche Zahl bedeutet. — Ist $F(x)$ ein Polynom derart, daß für die Bruchteile $F(n) - a_n$ von $F(n)$ ($n = 1, 2, \dots$) $|F(n) - a_n| \leq C\theta^n$ gilt, so ist $F(x)$ ganzwertig. N. Tschebotaröw.

Bullig, Günter: Die Berechnung der Grundeinheit in den kubischen Körpern mit negativer Diskriminante. Math. Ann. **112**, 325—394 (1936).

Verf. stellt sich das Ziel, einen Algorithmus zur Berechnung der Grundeinheiten von kubischen Zahlkörpern mit negativer Diskriminante aufzustellen. Ist $\alpha = (\alpha, \beta, \gamma)$ ein Zahltripel, welches eine Ordnung innerhalb eines komplexen kubischen Körpers K bestimmt, so bestimme man $a_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$, indem man jedes a_{n-1} mittels einer ganzzahlig umkehrbaren linearen Transformation nach einer ziemlich komplizierten rekurrenten Vorschrift unterwerfe. Dann beweist der Verf., daß dieser Algorithmus stets periodisch ist, daß es nämlich gewisse i, k gibt, so daß für alle $l \geq 0$ $(\alpha_1^{(i+l)}, \alpha_2^{(i+l)}, \alpha_3^{(i+l)}) = \varepsilon(\alpha_1^{(k+l)}, \alpha_2^{(k+l)}, \alpha_3^{(k+l)})$ gilt, wobei ε eine Einheit des Körpers K ist. Ist dabei die Differenz $i - k$ die kleinstmögliche, so ist ε die Grundeinheit von K . Die vom Verf. aufgestellte Tripelfolge ist Teilfolge der sog. Minkowskifolge (vgl. H. Minkowski, Werke **1**, 357—371). — Verf. erwähnt nicht, daß es schon seit langem mehrere Algorithmen zur Berechnung der kubischen Grundeinheiten gibt (Charve, Voronoï, Berwick, Ouspensky usw.). Indessen ist z. B. der fast gleichzeitig mit der erwähnten Arbeit von Minkowski veröffentlichte Algorithmus von Voronoï (Doktor-Diss., Warschau 1896, Russisch) zum Algorithmus des Verf. verwandt, aber viel einfacher. Dieser Algorithmus wurde von B. Delaunay [Math. Z. **31**, 1—26 (1929)] zur rechnerischen Bestimmung der Grundeinheiten von kubischen Körpern bis $D = -368$ verwendet, während der Verf. kein rechnerisches Beispiel anführt. — Voronoï hat außerdem einen Algorithmus zur Berechnung der Grundeinheitensysteme in total-reellen kubischen Körpern aufgestellt (loc. cit. S. 136—203). N. Tschebotaröw.

Gupta, Hansraj: On the numbers of Ward and Bernoulli. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **3**, 193—200 (1936).

The author gives some elementary identities connected with $G(n, r)$, the sum of the products r at a time of $1, 2, \dots, n$.

Davenport (Cambridge).

Bang, A. S.: Über die unbestimmte Gleichung $f(x, y) = 1$, wo $f(x, y)$ ein homogenes Polynom mit ganzen Koeffizienten ist. Mat. Tidsskr. B **1936**, 25—30 [Dänisch].

Corput, J. G. van der: Über einige Vinogradoffsche Methoden. I. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **39**, 345—351 (1936).

Mittels einer Methode von Vinogradoff (dies. Zbl. **11**, 296) und in geringer Verschärfung zweier Ergebnisse dieses Mathematikers werden u. a. folgende zwei

Sätze bewiesen: Satz 3: Ist $k \geq 2$ ganz und $3\zeta = 16k \log(8e(k-1)) + 14 - \frac{9}{k}$, so gibt es zu jedem reellen α unendlich viele Brüche $\frac{z}{u^k}$ mit

$$\left| \alpha - \frac{z}{u^k} \right| < u^{-k - \frac{1}{5}}.$$

Satz 9: Ist $k \geq 2$ ganz, so gibt es zu jedem reellen α und zu jedem hinreichend großen L wenigstens einen Bruch $\frac{z}{u^k}$ mit

$$\left| \alpha - \frac{z}{u^k} \right| < \frac{1}{Lu^k} \quad \text{und} \quad 1 \leq u < L^{\frac{33}{3} k^2 \log 8(k-1)}.$$

Beide Resultate entstehen durch Spezialisierung eines sehr allgemeinen Satzes (Satz 4), der in einer weiteren Mitteilung bewiesen werden soll. *Mahler* (Groningen).

Gruppentheorie.

Garver, Raymond: Postulates for special types of groups. *Bull. Amer. Math. Soc.* **42**, 125—129 (1936).

Die bekannten Systeme von Gruppenaxiomen können für endliche Gruppen und ebenso für abelsche Gruppen etwas abgeschwächt werden. *Friedrich Levi*.

Kloosterman, H. D.: Endliche Abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Zahlentheorie. *Mathematica*, Leiden **2**, 220—231; **3**, 24—31, 118—122 (1934) u. 186—190; **4**, 117—122, (1935) u. 155—165 (1936) [Holländisch].

Tchounikhin, Serge: Über eine obere Grenze für die Ordnungen der Elemente einer endlichen Gruppe ohne Zentrum. *Math. Ann.* **112**, 583—585 (1936).

Ein sehr einfacher Beweis des Satzes: Wenn in einer Gruppe G ein Element A auftritt, dessen Ordnung nicht in dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen h_1, h_2, \dots, h_s aufgeht, wobei h_1, h_2, \dots, h_s die Anzahlen der in den Klassen konjugierten Elemente von G auftretenden Elemente bedeuten, so gehört eine vom Einheits-element verschiedene Potenz von A zum Zentrum von G . G kann dann also insbesondere keine einfache Gruppe zusammengesetzter Ordnung sein. *Magnus*.

Coxeter, H. S. M.: The groups determined by the relations $S^l = T^m = (S^{-1}T^{-1}ST)^p = 1$. *I. Duke math. J.* **2**, 61—73 (1936).

Sinkov, Abraham: The groups determined by the relations $S^l = T^m = (S^{-1}T^{-1}ST)^p = 1$. *II. Duke math. J.* **2**, 74—83 (1936).

Die erste Arbeit behandelt die im Titel genannten Gruppen G mit einer geometrischen Methode; sie werden dargestellt als Drehungsgruppen mit Fundamentalebene in einem dreidimensionalen sphärischen elliptischen oder parabolischen Raum, und es wird insbesondere gezeigt, daß ST von unendlicher Ordnung ist, wenn $\sin \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi}{m} \leq \cos \frac{\pi}{p}$ ist. Andernfalls ist G endlich. Die Fälle $m = 2$ und $l, m, p = 3, 4, 3$ werden besonders diskutiert. — Fügt man zu den Relationen von G noch $(ST)^n = 1$ hinzu, so erhält man für $l, m, p, n = 6, 6, 2, 2$ eine unendliche Gruppe. — Die zweite Arbeit behandelt die Gruppen G mit abstrakten Methoden; es werden insbesondere für $l, m, p = 3, 3, 2$ die sämtlichen Faktorgruppen von G angegeben und es wird weiterhin gezeigt: Fügt man in den Fällen $l, m, p = 4, 2, 2$ bzw. $3, 2, 3$ zu den Relationen von G noch eine Relation $(ST)^{2b}(S^{-1}T)^{2c} = 1$ hinzu, so erhält man endliche Gruppen der Ordnungen $8(b^2 + c^2)$ bzw. $6(b^2 + bc + c^2)$, woraus sich in diesen Fällen die Möglichkeit der Bestimmung aller endlichen Faktorgruppen von G ergibt.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Kasner, Edward, and George Comenetz: Groups of multipoint transformations with application to polygons. *Scripta Math.* **4**, 37—50 (1936).

Juvet, Gustave: Les rotations de l'espace Euclidien à quatre dimensions, leur expression au moyen des nombres de Clifford et leurs relations avec la théorie des spineurs. Comment. math. helv. 8, 264—304 (1936).

Neuer Beweis der Zerlegung der reellen 4-dimensionalen Drehungsgruppe in ein Produkt von zwei Untergruppen, deren jede isomorph zur binären unitären Gruppe ist, sowie der ebenfalls bekannten Isomorphie der Lorentzgruppe mit der komplexen binären speziellen linearen Gruppe (vgl. etwa des Ref. Gruppen von lin. Transf., Ergebn. Math. 4, H. 2, § 7). Als Hilfsmittel wird ein Cliffordsches hyperkomplexes System benutzt, welches isomorph zum System der Matrices vierten Grades ist (vgl. etwa Brauer und Weyl, dies. Zbl. 11, 244). *van der Waerden* (Leipzig).

Fenchel, Werner: Über beschränkte lineare Gruppen. Mat. Tidsskr. B 1936, 10.

Neuer Beweis des Satzes von Auerbach (dies. Zbl. 6, 100), nach dem eine reelle lineare Gruppe mit beschränkten Matricelementen eine definite quadratische Form invariant läßt. Sind ξ_μ die Veränderlichen der Gruppe und x_ν kontragrediente Veränderliche, so bilde man die Vereinigungsmenge Ω einer beschränkten offenen Menge des x -Raumes und ihrer Bilder bei allen Transformationen der Gruppe. Dann ist Ω offen und invariant, und das Integral

$$\Phi(\xi) = \int_{\Omega} \left(\sum_{\tau} x_{\tau} \xi_{\tau} \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

ist die gesuchte quadratische Form.

van der Waerden (Leipzig).

Lardy, Pierre: Sur la détermination des structures réelles de groupes simples, finis et continus, au moyen des isomorphismes involutives. Comment. math. helv. 8, 189 bis 234 (1936).

Zwei Liesche Gruppen gehören zur gleichen komplexen „Struktur“, wenn ihre Infinitesimalringe über dem komplexen Zahlkörper isomorph sind. Sie gehören zum gleichen „reellen Typus“, wenn diese Ringe schon über dem reellen Zahlkörper isomorph sind. Nach der Thèse von Cartan sind die komplexen Strukturen einfacher Liescher Gruppen bekannt. Zu jeder Struktur gehört eine einzige geschlossene (kompakte) Gruppe. Die übrigen reellen Typen hat Cartan [Ann. École norm., III. s. 31 (1914)] vollständig bestimmt mit dem Ergebnis, daß zu jeder Signatur der Cartanschen quadratischen Form φ genau ein reeller Typus gehört. Diese Bestimmung wird nun wiederholt mit einer anderen, ebenfalls von Cartan herrührenden Methode. Man geht von einem geschlossenen reellen Typus aus und bestimmt alle linearen Isomorphismen R des Infinitesimalrings mit $R^2 = I$. Diese Isomorphismen R gehören alle der (im allgemeinen gemischt kontinuierlich-diskreten) adjungierten Gruppe an und führen in folgender Weise zu den reellen Typen: Wählt man die Erzeugenden X_1, \dots, X_r des Infinitesimalrings so, daß sie durch R in $X_1, \dots, X_n, -X_{n+1}, \dots, -X_r$ transformiert werden, so erzeugen

$$X_1, \dots, X_n, iX_{n+1}, \dots, iX_r$$

jedesmal einen reellen Typus derselben Struktur. *van der Waerden* (Leipzig).

Sz. Nagy, Béla de: Sur la mesure invariante dans les groupes topologiques. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1248—1250 (1936).

Ein einfacher Beweis für die von J. v. Neumann (dies. Zbl. 8, 246) gefundene Tatsache, daß in einer kompakten topologischen Gruppe jedes linksinvariante Haarsche Maß gleich jedem rechtsinvarianten Maß ist. Auch wird gezeigt, daß für eine im kleinen kompakte abelsche Gruppe dasselbe gilt. *van der Waerden* (Leipzig).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Ruziewicz, Stanisław: Sur une propriété de la base hamelienne. Fundam. Math. 26, 56—58 (1936).

The author proves the theorem that if B is a Hamel base [see Fundam. Math. 1, 105 (1920)] and S is the sum of less than 2^{\aleph_0} sets each superposable by translation

or by rotation with B , then S is of interior Lebesgue measure zero. This theorem gives as a corollary that there exists a linear non-measurable (L) set Q such that every sum of less than 2^{\aleph_0} sets superposable with Q by translation or rotation is of interior measure zero; this in turn yields a positive solution to a problem proposed by E. Szpilrajn [see Fundam. Math. 25, 546 (1935); this Zbl. 13, 8] (a problem already solved by Sierpiński).

G. T. Whyburn (Virginia).

Sierpiński, W.: Remarque sur les translations d'ensembles. Fundam. Math. 26, 59—60 (1936).

The author shows that a linear set N whose existence he had previously demonstrated [see Fundam. Math. 19, 24—27. (1932) this Zbl. 5, 197] having the properties that neither N nor its complement contains a perfect set and that N is transformed, except for a set of power less than the power of the continuum, into itself under any translation also satisfies the conditions imposed in the problem of E. Szpilrajn (see the preceding review).

G. T. Whyburn (Virginia).

Tonelli, L.: Su una proposizione fondamentale dell'analisi matematica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 161—165 (1936).

Es wird folgende Verschärfung des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes für Punktmengen auf einer Geraden bewiesen: F sei eine beschränkte abgeschlossene Menge auf der Geraden r , und jedem Punkt $P \in F$ sei wenigstens eine Strecke I_P auf r zugeordnet, die P im Innern enthält. Gibt man dann $\lambda > 0$ beliebig vor, so können Strecken s_1, \dots, s_n von kleinerer Länge als λ so auf r bestimmt werden, daß verschiedene s_i keine inneren Punkte gemeinsam haben, $\sum s_i \supset F$ gilt und in jedem s_i wenigstens ein Punkt $P_i \in F$ existiert, für den ein ihm zugeordnetes I_{P_i} die Strecke s_i ganz im Innern enthält.

H. Busemann (Kopenhagen).

Sierpiński, W.: Remarque sur la courbe péanienne. Wiadom. mat. 42, 1—3 (1936).

Ist eine das Einheitsquadrat ausfüllende „Kurve“ von Peano durch die Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ mit $0 \leq t \leq 1$ gegeben und bezeichnet ψ^n die n -te Iterierte von $\psi = \psi^1$ [wobei $\psi^0(t) = t$], so füllt die durch die endliche bzw. unendliche Folge von Gleichungen $\{x_n = \varphi \psi^{n-1}(t)\}$ mit $0 \leq t \leq 1$ und $n = 0, 1, \dots, k$ bzw. $n = 0, 1, 2, \dots$ ad inf. gegebene „Kurve“ den k -dimensionalen bzw. unendlichdimensionalen Einheitswürfel aus.

B. Knaster (Warszawa).

Saks, S.: Sur quelques propriétés métriques d'ensembles. Fundam. Math. 26, 234 bis 240 (1936).

R sei eine ebene Punktmenge. Die Menge der Halbtangenten an R in einem Punkt a (die Contingens von R in a) werde mit $\text{contg}_R a$ bezeichnet. Wenn beide Halbgeraden einer durch a gehenden Geraden g Halbtangenten an R in a sind, heißt g Tangente an R in a , insbesondere extreme Tangente, wenn eine der beiden offenen durch g bestimmten Halbebenen keine Halbtangente an R in a enthält. Es wird dann auf sehr einfache Weise gezeigt: Die Menge P der Punkte a von R , wo $\text{contg}_R a$ nicht die ganze Ebene ausmacht, ist enthalten in der Vereinigungsmenge von abzählbar vielen rektifizierbaren Bögen. In allen Punkten von P , von einer Menge der Länge O abgesehen, ist $\text{contg}_R a$ eine Halbebene oder eine Gerade. Wenn Q_δ die Menge der Punkte von R bezeichnet, wo eine extreme Tangente existiert und parallel zu der festen Richtung δ ist, so hat die Projektion von Q_δ auf eine zu δ senkrechte Gerade das Maß O . Hieraus folgen leicht bekannte, sonst mit komplizierteren Mitteln bewiesene Sätze von Denjoy über die Derivierten einer Funktion $F(x)$. H. Busemann.

Ruziewicz, St.: Sur une propriété des fonctions arbitraires d'une variable réelle. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 83 bis 85 (1935).

Angabe (für $n = 1, 2, \dots$) von n festen Funktionen einer reellen Veränderlichen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ I. Bairescher Klasse derart, daß für jede Funktion von n reellen Veränderlichen $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine meßbare Funktion $\varphi(x)$ existiert, die der Gleichung $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi[f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)]$ genügt (Literatur

dies. Zbl. 13, 251). Stetige Funktionen $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, von derselben Eigenschaft gibt es dagegen, selbst für $n = 1$, nicht. *B. Knaster (Warszawa).*

Kempisty, Stefan: Sur l'aire de la surface $z = f(x, y)$. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1138—1140 (1936).

Cette note contient une définition nouvelle de l'aire d'une surface continue $z = f(x, y)$, définie pour les points x, y d'un rectangle R_0 , et en traite quelques propriétés. La définition est la suivante. On couvre R_0 par un système fini S de rectangles réguliers R_i (c.-à-d. tels que les côtés d'un R_i ont des longueurs h_i, k_i satisfaisant à $\frac{1}{2} \leq h_i/k_i \leq 2$) sans points intérieurs communs et l'on forme la somme $F(S)$ des aires des triangles qui ont pour sommets les points de la surface dont les projections sont ou bien $a_i, b_i; a_i + h_i, b_i; a_i, b_i + k_i$; ou bien $a_i + h_i, b_i; a_i, b_i + k_i; a_i + h_i, b_i + k_i$. Alors la surface sera régulièrement quarrable lorsque la limite supérieure de $F(S)$ est finie, quand les dimensions des rectangles de S tendent uniformément vers zéro. *Ridder.*

Kempisty, Stéfán: Intégrale Denjoy-Stieltjes d'une fonction de deux variables. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1241—1244 (1936).

Définitions: 1. Une fonction d'intervalle, $F(R)$, possède au point x, y une dérivée régulière, $D_G F$, par rapport à une fonction additive à variation bornée, $G(R)$, si la limite du quotient $\frac{F(R_j)}{G(R_j)}$ existe pour toute suite d'intervalles $\{R_j\}$, réguliers (c.-à-d. avec des côtés h_j, k_j satisfaisant à $\frac{1}{2} < \frac{h_j}{k_j} < 2$), contenant x, y et tendant vers x, y .

2. En généralisant une définition de Burkill, on peut dire que $F(R)$ possède sur l'intervalle R_0 une intégrale régulière, si pour les divisions de R_0 dans des nombres finis d'intervalles réguliers les sommes correspondantes des valeurs de F sur ces intervalles tendent vers une limite finie, quand les dimensions des intervalles tendent uniformément vers zéro. Ce sont ces deux définitions qui permettent l'auteur d'étendre son procédé antérieur de totalisation des fonctions de deux variables (voir ce Zbl. 9, 208) et d'obtenir ainsi pour ces fonctions un procédé de totalisation régulière et par rapport à une fonction additive à variation bornée. *J. Ridder.*

Favard, J.: Essai sur la notion de bord d'une surface. Ann. École norm., III. s. 52, 269—316 (1936).

Im euklidischen R_3 sei eine abgeschlossene Menge E gegeben. Sie heißt eine Menge E_C , wenn eine einfache geschlossene Jordankurve C existiert, die zu E fremd ist und nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne E zu treffen. E_C enthält eine in bezug auf diese Eigenschaft irreduzible Teilmenge I_C . Jedes I_C ist perfekt und enthält keine im R_3 offene Teilmenge. Eine abgeschlossene Menge K wird mit $K(E_C)$ bezeichnet, wenn sie E_C enthält und einen nichtleeren Durchschnitt hat mit jeder Kurve C' , in die C stetig deformiert werden kann, ohne E_C zu treffen. $K(E_C)$ enthält eine bzgl. dieser Eigenschaften irreduzible Teilmenge $S(E_C)$. Die Menge $S(E_C) - E_C$ enthält keine isolierten Punkte und keine in R_3 offene Teilmenge; die Menge aller Punkte der Dimension 2 ist dicht in ihr. $S(E_C)$ ist perfekt und enthält keine im R_3 offene Teilmenge. $\overline{S(E_C) - E_C}$ ist ein Kontinuum. Enthält es E_C , so nennt Verf. $S(E_C)$ eine Fläche mit dem Rand E_C ; eine abgeschlossene Menge F nennt er ein Blatt, wenn F eine Menge $K(E_C)$ ist für jedes $E_C \subset F$. Der Durchschnitt einer monoton fallenden Folge von Blättern ist wieder ein Blatt. Für irreduzible Blätter gelten ähnliche Sätze wie für $S(E_C)$. *Nöbeling (Erlangen).*

Analysis.

Nakahara, Isamu: Axioms for the weighted means. Tôhoku Math. J. 41, 424 bis 434 (1936).

In ähnlicher Weise wie Matsumura für das arithmetische Mittel (vgl. dies. Zbl. 6, 195) zeigt Verf., daß das geometrische Mittel und gewogene arithmetische und geometrische Mittel durch analoge Forderungen charakterisiert werden können. *Fenchel.*

Fabian, W.: Fractional calculus: Fractional contour integration. Philos. Mag., VII. s. 21, 274—280 (1936).

Instead of the usual rectilinear paths of integration the author uses closed contours in defining integrals and derivatives of non-integer orders. Some applications are shown to summation of infinite series. Contrary to author's statement the idea of using such contours is not new [see, e. g. papers by Nekrassow in Moscow Math. Sbornik 14, 45—167, 344—393, 410—426 (1888—1890)] which contain formulas analogous to, and more general than, those of the author. *J. D. Tamarkin.*

Kershner, Richard: On singular Fourier-Stieltjes transforms. Amer. J. Math. 58, 450—452 (1936).

Es sei $\sigma(x)$, $-\infty < x < +\infty$, stetig, beschränkt und monoton wachsend. Falls $\sigma(x)$ totalstetig ist, gilt bekanntlich

$$L(t, \sigma) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \pm\infty, \quad \text{wo } L(t, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\sigma(x), \quad (1)$$

während dieses nicht der Fall zu sein braucht, wenn $\sigma(x)$ nicht totalstetig ist, wie das Beispiel der Cantor-Lebesgueschen singulären Funktion zeigt. Der Verf. betrachtet für ein beliebiges rationales $0 < a = \frac{p}{q} < \frac{1}{2}$ (p und q teilerfremd) die nach dem Muster dieser Funktion gebildeten singulären Funktionen $\sigma_a(x)$, deren Wachstumsstellen die Punkte $\pm a \pm a^2 \pm a^3 \pm \dots$ sind (für $a = \frac{1}{3}$ ist das die Cantor-Lebesguesche Funktion); man hat

$$L(t, \sigma_a) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos(a^n t). \quad (2)$$

Für $a = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ ist (1) nicht erfüllt. Dagegen ergibt sich durch eine elementare Schlußweise das interessante Resultat, daß in allen anderen Fällen (1) erfüllt ist, indem

$$L(t, \sigma_a) = O((\log|t|)^{-\gamma}), \quad \gamma = \frac{-\log \cos(\pi/2q)}{\log(2 \log q / \log p)} > 0, \quad t \rightarrow \pm\infty. \quad (3)$$

Hiermit ist ein neues sehr einfaches Beispiel eines zuerst von Menchoff nachgewiesenen, für die Eindeutigkeitstheorie der trigonometrischen Reihen wichtigen Verhaltens gegeben.

B. Jessen (Kopenhagen).

Toscano, Letterio: Contributo alla formazione del formulario delle successioni ricorrenti associate del secondo ordine. An. Fac. Ci. Porto 20, 5—21 u. 65—75 (1935).

Der Aufsatz knüpft an die von G. Candido (dies. Zbl. 9, 396) und Toscano selbst (dies. Zbl. 10, 118; I. u. II.) an. Werden die dort angeführten Bezeichnungen verwendet und ferner $(W_1 - \frac{1}{2} p W_0)/\sqrt{\lambda} = \cos \bar{\omega}$, $W_0 \sqrt{q} \sin \omega / \sqrt{\lambda} = \sin \bar{\omega}$ gesetzt, wo $\lambda = W_1^2 - W_0 W_2$ ist, so gilt für die Glieder der rekurrenten Folge die trigonometrische Darstellung:

$$W_n = q^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\lambda} \cdot \frac{\sin(n\omega + \bar{\omega})}{\sin \omega}, \quad \Psi_n = 2 q^{\frac{n}{2}} \sqrt{\lambda} \cos(n\omega + \bar{\omega}).$$

Aus elementaren Formeln für Winkelfunktionen ergeben sich daher Formeln für die Glieder der rekurrenten Folgen; solcher Formeln wird eine große Anzahl (56) aufgestellt; für einige wird auch der besondere Fall der Zahlenfolge von Fibonacci eigens behandelt. Eine weitere Formelgruppe betrifft Summen gleicher Potenzen der Glieder der Folge und zwei letzte enthalten Formeln, die durch Koppelung von Sinus und Kosinus mittels der Eulerischen Formel und durch Differentiation gewonnen werden.

L. Schrutka (Wien).

Bruwier, L.: Sur les solutions périodiques d'une équation différentielle fonctionnelle. I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 4, 336—342 (1935); 5, 14—17 (1936).

The author considers the functional-differential equation

$$f^{(n)}(x) + \sum_{r=1}^{n-1} a_r f^{(n-r)}(x + h_r) + \sum_{s=1}^m A_s f(x + H_s) = F(x) \quad (*)$$

where $F(x)$ is continuous function of bounded variation and periodic of period ω . It is shown, in extending known facts of the theory of differential equations, that (*) has a solution of period ω which can be expanded, together with its derivatives up to order n inclusive, in uniformly convergent Fourier series, provided $2\pi/\omega$ is not a root of the characteristic equation $\varphi(t) \equiv t^n + \sum_r a_r t^{n-r} e^{t h_r} + \sum_s A_s e^{t H_s} = 0$.

Analogous results hold when $F(x)$ is merely bounded and integrable, or analytic in a strip.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Reihen:

Leja, F.: Sur les séries de Taylor des fonctions de deux variables réelles. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) *Mathematica*, Cluj **9**, 159—163 (1935).

Eine elementare Diskussion der Konvergenzeigenschaften einer Taylorsche Reihe von zwei Veränderlichen, wobei die homogenen Polynome als Reihenglieder aufgefaßt werden.

Rogosinski (Königsberg).

Petrovitch, Michel: Représentation d'une classe de séries par une intégrale. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) *Mathematica*, Cluj **9**, 146—154 (1935).

Die Reihe $\sum_1^\infty u_k \log k$ sei konvergent und die (dann konvergente) $\sum_1^\infty u_k$ habe den Wert 0. Setzt man $f(x) = \sum_1^\infty u_k x^k$, so wird bewiesen (was formal leicht herzuleiten ist), daß die Reihe $\Phi(\sigma) = \sum_1^\infty u_k \log(\sigma + k)$ für $\sigma > -1$ gleichmäßig konvergiert und dort durch das Laplace-Abelsche Integral

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} F(t) dt; \quad F(t) = -\frac{f(e^{-t})}{t}$$

darstellbar ist.

Rogosinski (Königsberg).

Clarkson, J. A., and W. C. Randels: Fourier series convergence criteria, as applied to continuous functions. *Duke math. J.* **2**, 112—116 (1936).

Let $\varphi(t) = \varphi(f, x; t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, $\Delta_\delta^k \varphi(t) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \varphi(t+j\delta)$ ($k = 1, 2, \dots$), and let C denote the space of all continuous functions of period 2π . It has been proved by Mazurkiewicz (this Zbl. **3**, 299 and 458) that the set of functions $f \in C$ such that the integral $\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t} dt$ converges for some x , is of the first category in C .

The authors show that the same may be said of the set of functions $f(x) \in C$ such that

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{|\Delta_\delta^k(t)|}{t} dt < \infty \text{ for some } x \text{ and } k.$$

A. Zygmund (Wilno).

Singh, A. N.: On the construction of Fourier's series which diverge at unenumerable sets. *Rend. Circ. mat. Palermo* **59**, 261—264 (1935).

Using Fejér's well-known polynomials [Fejér, *J. reine angew. Math.* **137**, 1—5 (1910)] the author gives a new example of a continuous function whose Fourier series diverges at a non-enumerable set of points.

A. Zygmund (Wilno).

Wang, Fu Traing: On the convergence factor of Fourier series at a point. II. *Sci. Rep. Tôhoku Univ.*, I. s. **24**, 665—696 (1936).

Let $f(t)$ be an L -integrable function of period 2π , with Fourier coefficients a_n, b_n ; let $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, $\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \varphi(u) du$. The paper contains a number of results connecting the conditions of the form $\varphi_\alpha(t) = O(t^\beta)$

with the convergence of the series (*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nt + b_n \sin nt}{n^\gamma}$ for $t = x$ (and corresponding results for the conjugate series). The following theorems may serve as examples: (a) If $\varphi_\alpha(t) = O(t^\alpha)$, $\alpha > 0$, the series (*) converges for $t = x$ and $\gamma = \alpha/(\alpha + 1)$. (b) If the series (*) converges for $t = x$, and if $0 < \gamma < 1$, then $\varphi_\alpha(t) = O(t^{\alpha-\gamma})$, provided that $\alpha > 1 + \gamma$. (I. see this Zbl. 12, 206.) A. Zygmund (Wilno).

Wang, Fu Traing: A note on summability of Fourier series. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 697—700 (1936).

Let $f(x)$ be an L -integrable function of period 2π , and let $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2s$. At every point x where $t^{-1} \int_0^t |\varphi(u)| du = O\left(\log \frac{1}{t}\right)^{-1}$, the Fourier series of f is summable $(R, e^{n^\alpha}, 1)$, where $0 < \alpha < 1$, to sum s . (Cf. Hardy and Littlewood, this Zbl. 8, 310 and 464.) A. Zygmund (Wilno).

Rogosinski, Werner: Abschnittsverhalten bei trigonometrischen und insbesondere Fourierschen Reihen. Math. Z. 41, 75—136 (1936).

Let $s_m(x)$ and $\sigma_m(x)$ denote the partial sums and the first arithmetic means of the series (*) $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu(x)$; similarly, let $\bar{s}_m(x)$ and $\bar{\sigma}_m(x)$ be the partial sums and the first arithmetic means of the conjugate series (*) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu(x)$. In his earlier papers [Math. Ann. 95, 110 to 134 (1925); Math. Z. 25, 132—149 (1926)], Rogosinski established a number of important theorems concerning the behaviour of the expressions $s_m(x + \alpha_m) \pm s_m(x - \alpha_m)$, $\bar{s}_m(x + \alpha_m) \pm \bar{s}_m(x - \alpha_m)$, where $\alpha_m = O(1/m)$. In the present paper the author generalizes those theorems in various directions and constructs a systematic theory.

The new results concern the behaviour of the expressions $\gamma_m = \sum_{\nu=0}^m c_\nu \varphi(\nu P_m)$, in connexion with the behaviour of the series $\sum_0^\infty c_\nu$; here $\varphi(P)$ is a sufficiently regular function of the point $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ of the n -dimensional space, and $\{P_m\}$ a sequence of points tending to 0. The following theorem may serve as example. (1) If $\varphi(P)$ has continuous first and second derivatives, and if the series $\sum_0^\infty c_\nu$, with partial sums s_m , is summable $(C, 1)$ to sum s , then $\gamma_m - (s_m - s) \varphi(m P_m) \rightarrow s \varphi(0)$, provided that $P_m = O(1/m)$. This is only a particular case of a more general theorem, which we shall not state here, and which concerns the series $\sum c_\nu$ summable (C, r) . By specialization of the function $\varphi(P)$ the author obtains numerous interesting formulae for the series (*) and (*) (some of these formulae have already been established in the papers quoted above). For example: If $h_m = O(1/m)$ and $\sigma_m(\xi) \rightarrow A$, then (2) $s_m(\xi) + (-1)^{r-1} \frac{s_m^{2r}(\xi)}{m^{2r}} \rightarrow A$ ($m \rightarrow \infty, r = 1, 2, \dots$), (3) $\frac{1}{2} [s_m(\xi + h_m) + s_m(\xi - h_m)] - (s_m(\xi) - A) \cos m h_m \rightarrow A$, (4) $\frac{1}{2 h_m} \int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} s_m(x) dx - (s_m(\xi) - A) \frac{\sin m h_m}{m h_m} \rightarrow A$, (5) $\frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x) dx dt - (s_m(\xi) - A) \left(\frac{\sin \frac{1}{2} m h_m}{\frac{1}{2} m h_m} \right)^2 \rightarrow A$. Corresponding results hold for the series (*).

The rest of the paper is devoted to the study of the behaviour of the Fourier series, and of the conjugate series, at the points where the function has a jump. The following proposition is an analogue of proposition (1): (6) Let $f(t)$ be an L -integrable function of period 2π , $\psi(t) = f(\xi + t) - f(\xi - t)$, $\psi_m(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{1/m}^\pi \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt$,

$\bar{s}_m^*(\xi) = s_m(\xi) - \psi_m(\xi)$, and suppose that there is a constant D such that $\frac{1}{t} \int_0^t |\psi(u) - D| du \rightarrow 0$

with t . Let $(*)$ be the Fourier series of f , and let the expression γ_m be formed for the series $(*)$. Then, if φ and $\{P_m\}$ satisfy the hypothesis of (1),

$$\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi} \log 2m\right) \varphi(0) - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right) \varphi_m(mP_m)$$

(C -Euler's constant) where $G_m = \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{\nu} \varphi(\nu P_m)$ (ν — odd). The following propo-

sition deserves attention. (7) If $(*)$ is the Fourier series of f , and if $|a_n| + |b_n| = O(1/n)$, the series $(*)$ presents Gibbs's phenomenon at every point x where $f(x+0) \neq f(x-0)$.
Zygmund (Wilno).

Hamilton, Hugh J.: Transformations of multiple sequences. Duke math. J. 2, 29—60 (1936).

Eine n -fache Zahlenfolge $\{s_{k_1, \dots, k_n}\}$ ($k_\nu = 1, 2, \dots$) heie (1) beschränkt, wenn $|s_{k_1, \dots, k_n}| < M$ fr alle k_1, \dots, k_n gilt; (2) schließlich beschränkt (ultimately bounded), wenn $|s_{k_1, \dots, k_n}| < M$ wenigstens gilt, sobald k_1, \dots, k_n sämtlich hinreichend groß sind; (3) konvergent, wenn s_{k_1, \dots, k_n} für $k_1, \dots, k_n \rightarrow \infty$ gegen einen endlichen Wert s strebt; (4) beschränkt und konvergent, wenn sie (1) und (3) erfüllt; (5) regulär konvergent, wenn sie konvergent ist und wenn überdies jeder „Reihenlimes“ existiert, d. h. jede Teilfolge der s_{k_1, \dots, k_n} , die man durch Festhalten irgendwelcher $\varrho (< n)$ Indizes $k_{\nu_1}, \dots, k_{\nu_\varrho}$ erhält, gegen einen endlichen Wert $s_{k_{\nu_1}, \dots, k_{\nu_\varrho}}$ (Reihenlimes) konvergiert; (6) schließlich regulär konvergent, wenn sie konvergiert und wenn wenigstens jeder zu sämtlich hinreichend großen Indizes $k_{\nu_1}, \dots, k_{\nu_\varrho}$ gehörige Reihenlimes existiert; (7) beschränkt und schließlich regulär konvergent, wenn sie (1) und (6) erfüllt. — Wird eine n -fache Folge $\{s_{k_1, \dots, k_n}\}$ ($k_\nu = 1, 2, \dots$) mittels einer Matrix $\|a_{m_1, \dots, m_n; k_1, \dots, k_n}\|$ ($m_\nu, k_\nu = 1, 2, \dots$) in eine neue Folge σ_{m_1, \dots, m_n} ($m_\nu = 1, 2, \dots$)

mit $\sigma_{m_1, \dots, m_n} = \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_n; k_1, \dots, k_n} s_{k_1, \dots, k_n}$ transformiert, so kann man allgemein die Frage

stellen, unter welchen Voraussetzungen über die Matrix bestimmte Eigenschaften der s -Folge wieder bestimmte Eigenschaften der σ -Folge nach sich ziehen. Verf. beschäftigt sich in der vorliegenden Arbeit genauer mit den folgenden vier Fragen: I. Unter welchen Voraussetzungen über die Matrix folgt aus der Zugehörigkeit der s -Folge zu einer bestimmten der Klassen (1)—(7) die Zugehörigkeit der σ -Folge wieder zu einer bestimmten dieser Klassen? II. Wann folgt aus der Zugehörigkeit der s -Folge zu einer bestimmten der (die Konvergenz voraussetzenden) Klassen (3)—(5) die Zugehörigkeit der σ -Folge wieder zu einer bestimmten dieser Klassen und das gleichzeitige Bestehen der Beziehung $\lim_{k_1, \dots, k_n \rightarrow \infty} s_{k_1, \dots, k_n} = \lim_{m_1, \dots, m_n \rightarrow \infty} \sigma_{m_1, \dots, m_n}$? III. Wie muß die Matrix beschaffen sein,

damit eine s -Folge aus einer bestimmten der (schließlich reguläre Konvergenz voraussetzenden) Klassen (5)—(7) in eine σ -Folge übergeführt wird, die wieder einer bestimmten dieser Klassen angehört, und daß überdies die zu hinreichend großen Indizes $k_{\nu_1}, \dots, k_{\nu_\varrho}$ gehörigen Reihenlimes der s -Folge mit den entsprechenden der σ -Folge übereinstimmen? IV. Wie muß schließlich die Matrix beschaffen sein, daß eine s -Folge der Klasse (5) stets in eine σ -Folge dieser Klasse übergeführt wird und daß überdies alle Reihenlimes der s -Folge mit den entsprechenden der σ -Folge übereinstimmen? Verf. beantwortet die Fragen I und II, die zum Teil schon früher von Kojima [Tôhoku Math. J. 21, 3—14 (1922)], Robison [Trans. Amer. Math. Soc. 28, 50—73 (1926)], Leja (Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1930, 1—10) und Hallenbach (dies. Zbl. 8, 155 u. 464) behandelt wurden, in gewissem Sinne vollständig, während die Fragen III und IV nur unter der Voraussetzung verschwindender Reihenlimes erledigt werden. Lösch.

Cooke, Richard G.: On mutual consistency and regular T -limits. Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 113—125 (1936).

Eine Matrix $\|a_{nk}\|$ ($n, k = 1, 2, \dots$) heißt eine Toeplitzsche oder T -Matrix, wenn sie die drei Bedingungen erfüllt: (α) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq M$ für alle n , (β) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$ für jedes feste k , (γ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$. Zwei T -Matrizen $A = \|a_{nk}\|$ und $B = \|b_{nk}\|$ heißen äquivalent oder wechselseitig konsistent (mutually consistent) bzgl. einer Klasse von Zahlenfolgen (z_k) , wenn für jede Folge (z_k) dieser Klasse aus der Konvergenz ihrer A -Transformation $z'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k$ ($n = 1, 2, \dots$) die ihrer B -Transformation $z''_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} z_k$ ($n = 1, 2, \dots$) zum gleichen Limes folgt und umgekehrt. Gilt sogar für jede Folge (z_k) der Klasse die Beziehung $z'_n - z''_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, so nennt Verf. die Matrizen A und B absolut äquivalent bzgl. der betreffenden Klasse. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Aufstellung von Bedingungen für die Äquivalenz zweier T -Matrizen. Die Hauptresultate lauten: I. Die T -Matrizen A und B sind dann und nur dann bzgl. der Klasse der beschränkten Folgen absolut äquivalent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_{nk}| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. II. Ist (ϑ_k) eine unbeschränkte Folge, für die $R_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_{nk}| |\vartheta_k|$ für jedes $n = 1, 2, \dots$ existiert, so sind die T -Matrizen A und B dann und nur dann bzgl. der Klasse der Folgen (z_k) mit $|z_k| \leq |\vartheta_k|$ ($k = 1, 2, \dots$) absolut äquivalent, wenn $R_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. — Aus diesen Sätzen ergeben sich unmittelbar Bedingungen dafür, daß eine T -Matrix die Folgen z_1, z_2, z_3, \dots und z_2, z_3, \dots stets gleichzeitig und zum gleichen Wert limitiert. — Die Ergebnisse werden auf spezielle T -Matrizen (Rieszsche, Cesàrosche und Borelsche Mittel) angewandt.

F. Lösch (Stuttgart).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Dehousse, L.: Sur un système différentiel à point singulier. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. **20**, fasc. 3, 1—12 (1935).

In der Umgebung von $t = 0$ wird das Verhalten der Lösungen des Systems der Differentialgleichungen

$$\begin{cases} t \frac{dx}{dt} = \Phi(x, y, t, t^\lambda) \\ t \frac{dy}{dt} = \Psi(x, y, t, t^\lambda) \end{cases}$$

untersucht, wobei

$$\begin{cases} \Phi = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx} [\psi_k(t, t^\lambda) \sin ky - \varphi_k(t, t^\lambda) \cos ky] \\ \Psi = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx} [\varphi_k(t, t^\lambda) \sin ky + \psi_k(t, t^\lambda) \cos ky] \end{cases}$$

gesetzt ist und der Exponent λ positiv ist (weder ganze Zahl noch echter Bruch).
v. Koppenfels (Hannover).

Surikova, Z.: Sur les systèmes différentiels linéaires généraux. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **1**, 159—164 (1936).

L'auteur considère l'équation $L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = f(x)$ (1) avec les conditions $V_i(y) \equiv \sum_{r=1}^n \int_a^b y^{(r-1)}(x) d\alpha_{i,r}(x) = 0$ (2). Soit $y_1 \dots y_n$ un système fondamental de solutions de l'équation $L(y) = 0$; $V_{ik} = V_i(y_k)$, $D = \det. V_{ik}$. On construit la fonction de Green pour le cas $D \neq 0$ et la fonction de Green généralisée pour le cas $D = 0$. Il est à remarquer que le premier cas était résolu dans les mêmes conditions et de la même manière (entre autres questions) par M. Tamarkin dans

son mémoire de Math. Z. 27, 1—55 (1927); voir aussi les résultats parallèles de MM. Cioranescu, ce Zbl. 4, 149, 297, et Smohorshewski, ce Zbl. 12, 105. *Janczewski*.

Leimanis, Eugène: Sur les points singuliers des équations différentielles. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1244—1246 (1936).

Formulierung von Sätzen, die H. Poincaré für Systeme von zwei und drei Differentialgleichungen aufgestellt hat (Œuvres I, S. 167 ff.), für vier Differentialgleichungen. Die rechten Seiten des Systems

$$x'(t) = X, \quad y'(t) = Y, \quad z'(t) = Z, \quad u'(t) = U$$

werden als reelle, in Potenzreihen entwickelbare Funktionen von x, y, z, u vorausgesetzt; der Nullpunkt sei isolierter singulärer Punkt des Systems. Mit den partiellen Ableitungen im Nullpunkt wird die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} - \lambda, & \dots, & \frac{\partial X}{\partial u} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial U}{\partial x}, & \dots, & \frac{\partial U}{\partial u} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

gebildet. Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen, die übrigens bei den meisten der beigegebenen Beispiele nicht erfüllt sind, wird angegeben, daß sich die Art der Singularität danach richtet, wieviel Lösungen von (1) reell positiv, reell negativ, komplex mit positivem Realteil, komplex mit negativem Realteil sind. *Kamke*.

Buhl, A.: Sur la génération des équations de Monge-Ampère. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 71—88 (1936).

Aufzählung verschiedener Typen von Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen. Ihr Zusammenhang mit der Theorie der invarianten Integrale und mit gewissen Problemen der Differentialgeometrie. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Villa, Antonio: Sur un système d'équations aux dérivées partielles. Ann. Sci. Univ. Jassy 22, 119—128 (1936).

Betrachtet werden Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die eng mit den Diracschen Gleichungen zusammenhängen. Für die Lösungen werden Integralformeln angegeben, die die Lösungsfunktionen in einem Punkt darstellen durch Integrale über ihre Werte auf einer geschlossenen Fläche. *Rellich*.

Nicolesco, Miron: Extension du théorème de Liouville aux fonctions harmoniques d'ordre p . (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 209—210 (1935).

Eine im ganzen Raume beschränkte Lösung von $\Delta^n u = 0$ ist konstant (vgl. auch dies. Zbl. 5, 206). *W. Feller* (Stockholm).

Nicolesco, Miron: Séries de „puissances harmoniques“ dans un domaine borné. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 211 bis 214 (1935).

Ein spezielles Konvergenzkriterium für Reihen der Form

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(P), \quad u_{i+1}(P) = - \int_F \Delta u_i(A) \frac{\partial G^{i+1}(A, P)}{\partial n} d\sigma(A),$$

wobei P im Innern, A auf dem Rande der geschlossenen Fläche F liegt und G^i die Greensche Funktion der Gleichung $\Delta^i u = 0$ bezeichnet. *W. Feller* (Stockholm).

Nikodym, Otton: Sur le principe du minimum. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 110—128 (1935).

D'abord l'aut. rappelle diverses notions sur l'espace vectoriel abstrait de Hilbert et sur des fonctions introduites par Beppo Levi dans l'étude du problème de Dirichlet, fonctions auxquelles l'aut. a consacré un travail spécial (voir ce Zbl. 8, 159). Il introduit alors une équation

$$\partial(p \partial f / \partial x) / \partial x + \partial(p \partial f / \partial y) / \partial y + \partial(p \partial f / \partial z) / \partial z - qf = 0, \quad (1)$$

où les bornes de p sont positives et q est ≥ 0 ; à propos de cette équation, il définit un espace de Hilbert, dont les éléments sont certaines fonctions de Beppo Levi; cet espace contient un certain sous-espace linéaire, qui est formé de solutions de (1). Ces notions générales entraînent, pour les solutions de (1), un résultat découvert pour les fonctions harmoniques par S. Zaremba [J. Math. pures appl., IX. s. 6, 127—163 (1927)]. L'aut. modifie alors de la façon suivante les problèmes relatifs à (1): étant donné un sous-ensemble (Z) de l'espace de Hilbert, sous-ensemble qui doit remplir certaines conditions (en particulier des conditions de convexité et de continuité), il s'agit de trouver dans (Z) une fonction telle que l'intégrale triple

$$\int \left\{ p \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] + q f^2 \right\} d\omega$$

soit minimum. (Z) est par exemple l'ensemble des éléments dont la différence avec un élément donné a des valeurs-frontière nulles sur certains ensembles de droites. L'aut. démontre que, dans certaines hypothèses, ce minimum existe et est atteint par un seul élément. Pour certaines hypothèses, l'aut. n'a pas cherché à atteindre une grande généralité; son hypothèse D, p. 127, est en réalité une conséquence des autres hypothèses.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Donder, Th. de: Sur les crochets de discontinuité de J. Hadamard et de J. van Mieghem. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 265—278 (1936).

Um die van Mieghemschen Arbeiten über Wellenausbreitung leichter zugänglich zu machen, wird eine Darstellung des Kalküls mit den dort benutzten Klammer-symbolen gegeben, wobei nicht die Absicht bestand, die Theorie sachlich weiterzuführen.

W. Feller (Stockholm).

Northrop, E. P.: An operational solution of the Maxwell field equations. Amer. J. Math. 58, 195—224 (1936).

Apart from the divergence conditions, the Maxwell field equations in empty space are $\partial v / \partial t = i H v$, where v is a six-component vector function and H is a matrix differential operator. The solution of the vector equation is given formally by $v = e^{i H t} v_0$. The author studies H as a symmetric operator in Hilbert space, by requiring v to have components which are quadratically integrable in the sense of Lebesgue and by assigning a suitable domain to the formal operator H . Under a natural choice of the domain, H is essentially self-adjoint; but the domain of its unique self-adjoint extension, while completely described, is not characterized intrinsically. An application of the Fourier transformation converts H into an operator H' which is a multiplication by a simple matrix of linear functions. The resolvent, resolution of the identity, and other operator-functions of H' are easily calculated directly; and the application of the inverse of the Fourier transformation then yields explicit formulae for the corresponding operators associated with H . In this way, the operator $e^{i H t}$ is found to be a generalized integral operator with matrix kernel in which the elements are given in terms of the elementary algebraic and trigonometric functions together with the integral $\int \frac{\sin x}{x} dx$. The operator H is found to have a continuous spectrum, ranging from $-\infty$ to $+\infty$, with a single characteristic value of infinite multiplicity at 0. The divergence conditions are shown to be equivalent to restricting the consideration of H to the closed linear manifold of vectors orthogonal to the characteristic vectors associated with the characteristic value 0. The explicit solution of the Maxwell field equations obtained in this manner appears to place in evidence the description of wave propagation as a superposition of spherical waves emanating from an initial distribution of point sources of disturbance.

M. H. Stone.

Spezielle Funktionen:

MacRobert, T. M.: Derivation of Legendre function formulae from Bessel function formulae. Philos. Mag., VII, s. 21, 697—703 (1936).

In this paper a number of formulae involving Legendre functions are obtained

from known results involving Bessel functions. For example, from the formulae

$$\int_0^{\infty} x^{l-1} K_n(x) dx = 2^{l-2} \Gamma\left(\frac{l+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l-n}{2}\right)$$

and

$$K_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{m+\frac{1}{2}} \int_1^{\infty} e^{-xt} (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} P_n^{-m}(t) dt$$

is deduced the formula

$$\int_1^{\infty} (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} P_n^{-m}(t) t^{-l} dt = \frac{2^{l-m-2} \Gamma\left(\frac{l-m+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l-m-n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(l)}.$$

W. N. Bailey (Manchester).

Bailey, W. N.: Some infinite integrals involving Bessel functions. II. J. London Math. Soc. 11, 16—20 (1936).

As a supplement to a previous paper (cf. this Zbl. 12, 210) the author gives a representation of the integrals

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda-1} I_{\mu}(at) K_{\nu}(bt) K_{\rho}(ct) dt, \quad \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} K_{\mu}(at) K_{\nu}(bt) K_{\rho}(ct) dt.$$

by means of generalized hypergeometric functions, in particular cases in terms of Legendre functions. The notation follows the standard work of Watson. G. Szegő.

Meijer, C. S.: Einige Integraldarstellungen aus der Theorie der Besselschen und Whittakerschen Funktionen. I. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 394—403 (1936).

It is proved that, under certain conditions,

$$B_{p,r}\left(w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_{p+2} \end{matrix} \right. \right) = 2 \int_0^{\infty} w^{\beta-\alpha} J_{\alpha+\beta-1}(2u) \Psi\left(\frac{u^2}{w} \left| \begin{matrix} 1-\alpha, a_1, \dots, a_p, \beta \\ b_1, \dots, b_{p+2} \end{matrix} \right. \right) du$$

where

$$B_{p,r}\left(w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_{p+2} \end{matrix} \right. \right) = \sum_{h=1}^{r+2} \frac{\prod_{j=1}^{p-r} \Gamma(1+b_h-a_j) \prod_{j=1}^{r+2} \Gamma(b_j-b_h)}{\prod_{j=p-r+1}^p \Gamma(a_j-b_h) \prod_{j=r+3}^{p+2} \Gamma(1+b_h-b_j)} w^{b_h}$$

$$x_p F_{p+1}(1+b_h-a_1, \dots, 1+b_h-a_p; 1+b_h-b_1, \dots, 1+b_h-b_{p+2}; w),$$

the star denoting the omission of the parameter $1+b_h-b_h$, and

$$\Psi_{p,q}\left(\zeta \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_{p+2} \\ b_1, \dots, b_{p+2} \end{matrix} \right. \right) = \sum_{j=1}^q \frac{\prod_{h=1}^q \Gamma(c_j-c_h) \prod_{h=1}^{p-q+3} \Gamma(1-c_j+b_h)}{\prod_{h=q+1}^{p+2} \Gamma(1-c_j+c_h) \prod_{h=p-q+4}^{p+2} \Gamma(c_j-b_h)} \zeta^{1-c_j}$$

$$x_{p+2} F_{p+1}(1-c_j+b_1, \dots, 1-c_j+b_{p+2}; 1-c_j+c_1, \dots, 1-c_j+c_{p+2}; -\zeta).$$

Some of the particular cases of the function $B_{p,r}$ are $K_{\nu}(z)$, $W_{k,m}(z)$, $W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z)$ and $K_{\nu}(z) K_{\mu}(z)$. The theorem thus leads to integral representations of these functions.

W. N. Bailey (Manchester).

McLachlan, N. W., and A. L. Meyers: The ster and stei functions. Philos. Mag., VII. s. 21, 425—436 (1936).

These functions are defined by means of the equation

$$H_{\nu}(z i^{\pm 3/2}) = \text{ster}_{\nu} z \pm i \text{stei}_{\nu} z$$

where $H_{\nu}(z)$ is Struve's function of order ν . Power series and recurrence formulae for the functions are given and some integrals are evaluated. Asymptotic formulae are obtained and the polar form of the complex function is obtained by writing $\text{ster}_{\nu}(z) = S_{\nu}(z) \cos \psi_{\nu}(z)$, $\text{stei}_{\nu}(z) = S_{\nu}(z) \sin \psi_{\nu}(z)$. The function $L_{\nu}(z) = i^{-(\nu+1)} H_{\nu}(zi)$ is also discussed and its asymptotic formula obtained. H. Bateman (Pasadena).

McLachlan, N. W., and A. L. Meyers: Integrals involving Bessel and Struve functions. *Philos. Mag.*, VII. s. 21, 437—448 (1936).

Integrals of type

$$\int_0^z (lz)^{\nu} F_{\nu}(lz) dz = 2^{\nu-1} \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2}) z [F_{\nu}(lz) L_{\nu-1}(lz) - F_{\nu-1}(lz) L_{\nu}(lz)]$$

are given in which $F_{\nu}(z)$ is either $I_{\nu}(z)$ or $K_{\nu}(z)$. When $F_{\nu}(z)$ is replaced by $J_{\nu}(z)$, $L_{\nu}(z)$ must be replaced by $H_{\nu}(z)$. Integrals of type $\int z^n f(z) dz$ are also evaluated when $f(z)$ has the forms $\ker_{\nu}(z)$, $\text{kei}_{\nu}(z)$, $\text{ber}_{\nu}(z)$, $\text{bei}_{\nu}(z)$ respectively. The integral $\int J_{\mu}(lz) H_{\nu}(lz) z^{\sigma} dz$ is evaluated when $\sigma = \pm 1$ and the corresponding integrals in which $J_{\mu}(lz)$ is replaced first by $I_{\nu}(lz)$ and then by $K_{\nu}(lz)$ are considered. The equation $x''(z) + k^2 z x = a z^{\mu}$ is solved by means of Lommel functions and some miscellaneous formulae are given.

H. Bateman (Pasadena).

Krygowski, Zdislas: Sur certaines généralisations de l'équation à trois termes entre les fonctions sigma. *Bull. Sci. math.*, II. s. 60, 72—79 (1936).

Bekanntlich sind die elliptischen Funktionen und deren Grenzfälle gekennzeichnet durch die Existenz algebraischer Additionstheoreme. Schreibt man diese in rationaler Gestalt, so kann die unbekannte Funktion in jeden Summanden wiederholt als Faktor eingehen, etwa n mal höchstens. Bezeichnet man jene Anzahl als den „Grad“ des Additionstheorems und läßt Grenzfälle trigonometrischer oder rationaler Entartung beiseite, so bleibt $n \geq 4$. Baut man nun die elliptischen Funktionen in endlich vielen Schritten aus ganzen Funktionen auf, etwa aus der ungeraden Transzendenten $\sigma(u)$ Weierstrassens, so genügt mit konstanten α, β bekanntlich auch $e^{\alpha+\beta u^2} \sigma(u)$ einem Additionssatz 4. Grades, nämlich der obenerwähnten „équation à trois termes“, und wird nach Hurwitz durch diesen gekennzeichnet. Des Verf. Verallgemeinerungen betreffen Additionssätze in mehr unabhängigen Variablen bei Steigerung des Grades. In 4 Variablen z. B. wird für $\sigma(u)$ ein Additionssatz 7. Grades gegeben als Sonderfall eines in 12 Variablen angeschriebenen Additionssatzes vom 26. Grade. *Wilh. Maier.*

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Mazur, Stanislaw, et Wladyslaw Orlicz: Sur les fonctionnelles rationnelles. *C. R. Acad. Sci., Paris* 202, 904—905 (1936).

Une fonctionnelle continue $F(x)$ est dite rationnelle de degré (p, q) s'il existe deux polynomes [voir pour la notion du polynome abstrait S. Mazur et W. Orlicz, *Studia Math.* 5, 50—68 et 179—189 (1935); ce *Zbl.* 13, 210] $P(x)$ et $Q(x)$, de degré p et respectivement q , premiers entre eux et tels qu'on a $F(x) = P(x) : Q(x)$. Une opération continue, $H(x)$ définie dans un espace du type (B) et avec des valeurs appartenant à un espace du même type, est dite rationnelle de degré au plus (p, q) , si, quelle que soit la fonctionnelle linéaire f , la fonctionnelle $f\{H(x)\}$ est rationnelle de degré au plus (p, q) . Une opération rationnelle est toujours representable dans la forme $H(x) = P(x) : p(x)$, où l'opération $P(x)$ et la fonctionnelle $p(x)$ sont polynomes.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Nagel, Heinz: Über die aus quadrierbaren Hermiteschen Matrizen entstehenden Operatoren. *Math. Ann.* 112, 247—285 (1936).

The author studies the symmetric operators A with deficiency index (n, n) , where n is finite, which are defined by Hermitian symmetric matrices $\{a_{pq}\}$, such that $\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2 < +\infty$. The first part of the paper is devoted largely to a translation of v. Neumann's theory of symmetric operators and their extensions into the language of matrix theory. The study of the resolvents $(A + z)^{-1}$ is then carried out by the use of algebraic methods suggested by Hellinger [*Math. Ann.* 86, 18—29 (1922)]. In particular, the connections between the operator A and the operator A_l obtained by suppressing the first l rows and columns of the matrix $\{a_{pq}\}$ are discussed at length.

The characteristic value problem is also considered here. The theory is carried farthest in the detailed analysis of J -matrices and their generalizations: those matrices in which only a finite number of diagonals, neighboring the principal diagonal, have non-vanishing elements. In this case it is possible to give a detailed theory of the resolvent and characteristic value problems, with explicit analytical expressions. Some, but not all, of the known properties of ordinary Jacobi matrices are recovered in the present treatment.

M. H. Stone (Cambridge, Mass.).

Beth, Richard A.: *Untersuchungen über die Spektraldarstellung von J -Formen.* Frankfurt a. M.: Diss. 1932. 70 S.

In this dissertation, the author discusses the spectral problem for infinite Jacobi matrices (J -matrices) and the corresponding quadratic forms, using methods due to Hellinger [Math. Ann. **86**, 18—29 (1922)]. The thesis falls into three parts: the theory of the resolvent; the spectral representation and its connection with the moment problem; illustrative examples, eight in number. The theoretical results presented here are now available elsewhere in more fully developed form (see the reviewer's "Linear Transformations in Hilbert Space", New York 1932, Chapter X, § 4). *Stone*.

Murray, F. J.: *Linear transformations in L_p , $p > 1$.* Trans. Amer. Math. Soc. **39**, 83—100 (1936).

In this paper, the author investigates the properties of three operations on linear manifolds \mathfrak{M} in the Lebesgue space \mathfrak{L}_p over the interval $(0, 1)$, and applies the results to the study of linear operators in \mathfrak{L}_p . The operations in question are: (1) the formation of the closure $[\mathfrak{M}]^p$ in \mathfrak{L}_p ; (2) the formation of the intersection $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{L}_q$, where $q > p$ so that $\mathfrak{L}_q \subset \mathfrak{L}_p$; and (3) the formation of the orthogonal complement \mathfrak{M}^\perp in the conjugate space $\mathfrak{L}_{p'}$, where $1/p + 1/p' = 1$. A typical theorem reads as follows: if $p \geq r$, $p' \leq r'$, $1/p + 1/p' = 1$, $1/r + 1/r' = 1$, and \mathfrak{M} is a linear manifold in \mathfrak{L}_p , then $([\mathfrak{M}]^p)^\perp = \mathfrak{M}^\perp \cdot \mathfrak{L}_{r'}$. On the basis of the algebraic relations between these operations, the author introduces a classification of the behavior of manifolds in different spaces \mathfrak{L}_p where p ranges over a fixed interval. The application of this theory to linear operators generalizes v. Neumann's treatment of the case of \mathfrak{L}_2 (Hilbert space). An operator T in \mathfrak{L}_p is represented by its graph — the set of all pairs (f, Tf) in the product-space $\mathfrak{L}_p \times \mathfrak{L}_p$, which is isomorphic to \mathfrak{L}_p . Then T is linear if and only if its graph is a linear manifold, closed if and only if its graph is a closed set. By applying to the graph \mathfrak{T} of a linear operator T the operations described above, one obtains sets which, under suitable conditions, are graphs of related operators. For example, if the domain of T is dense in \mathfrak{L}_p , then the inversion of the pairs in the set \mathfrak{T}^\perp is the graph of a closed linear operator T^\perp in $\mathfrak{L}_{p'}$. The author defines skew-symmetric operators by the relation $T^\perp \subseteq T$. He investigates these operators, and studies also the behavior of projections defined in \mathfrak{L}_2 when considered in other spaces. The paper concludes with examples to establish the reality of classifications suggested in the general development. *M. H. Stone*.

Kantorovitch, Leonidas: *Les formes générales des opérations linéaires qui transforment quelques espaces classiques dans un espace semi-ordonné linéaire arbitraire.* C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1251—1253 (1936).

Dans une Note récente de l'auteur (ce Zbl. **13**, 268) est définie la notion de l'espace semi-ordonné linéaire. Cette notion embrasse des espaces fonctionnels les plus usuels. En même temps les espaces semi-ordonnés linéaires (ESOL) conservent beaucoup des propriétés du système de nombres réels. Cela permet d'étendre sur des opérations linéaires qui transforment un espace linéaire dans un ESOL plusieurs propriétés des fonctionnelles. Dans la présente Note l'auteur considère les fonctions $y(t)$ d'une variable réelle avec les valeurs appartenant à un ESOL. Pour une telle fonction la borne supérieure de sommes $\sum_{i=1}^n |y(t_i) - y(t_{i-1})|$ (qui est elle même un élément de l'ESOL) est par définition la variation de la fonction $y(t)$. Pour un ESOL régulier Y la forme générale d'une opération linéaire qui transforme l'espace C

[des fonctions $x(t)$, continues et définies dans l'intervalle (a, b)], dans Y est donnée par l'intégrale du type de Stieltjes

$$y = f(x) = \int_a^b x(t) d y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x(\tau_i) [y(t_i) - y(t_{i-1})],$$

où $y(t)$ est une fonction quelconque à variation bornée. La norme de cette opération est

$$\|f\| = \varlimsup_a^b y(t).$$

On obtient un résultat analogue aussi pour l'espace L des fonctions $x(t)$ sommables.

A. Kolmogoroff (Moscou).

Variationsrechnung:

Damköhler, Wilhelm: Periodische Extremalen vom Minimumtyp in Ringbereichen.

Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 5, 127—140 (1936).

Signorini et Tonelli (indépendamment l'un de l'autre) ont démontré, pour la première fois d'une façon rigoureuse, l'existence d'une extrémale fermée intérieure à une aire annulaire pour les intégrales quasi-régulières normales définies positives. Tonelli a donné aussi un théorème d'existence dans un cas particulier considéré par Birkhoff où il s'agit d'une intégrale indéfinie. Dans ce travail Damköhler établit un théorème d'existence pour les extrémales fermées en supposant seulement qu'il s'agisse d'une intégrale régulière. A cet effet il fait très adroitement usage d'un principe général de Tonelli en considérant l'extrémale cherchée comme courbe minimante dans une classe particulière, opportunément choisie, de courbes. *Basilio Manià.*

Tonelli, Leonida: Sulle estremali complete. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 5, 159—168 (1936).

Tonelli simplifie la démonstration du théorème de Damköhler (voir le réf. préc.) et généralise à son tour ce théorème, en considérant, au lieu des intégrales régulières, des intégrales quasi-régulières normales et même des intégrales quasi-régulières semi-normales. Il précise aussi les hypothèses qu'il faut admettre sur la frontière de l'aire annulaire ou sur le domaine de définition des intégrales pour la validité du raisonnement. *Basilio Manià (Pisa).*

Morse, Marston: Three theorems on the envelope of extremals. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 136—144 (1936).

The three theorems have been stated in Proc. Nat. Acad. 21, 619—621 (1935), this Zbl. 13, 170. Let g be an extremal for the integral

$$J = \int F(x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_m) dt.$$

Suppose that $F(x, x')$ is analytic, and that the strengthened Legendre condition holds along g . Let

$$x_i = x_i(s, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}) \quad (1)$$

be the family of extremals containing g and issuing from the first end point A of g . Then theorem 1 states that a necessary and sufficient condition that a point B on g be conjugate to A is that the family (1) with the parameters α sufficiently restricted shall fail to simply cover the neighborhood of B [Morse and Littauer, Proc. Nat. Acad. Sci. 18, 724—730 (1932); this Zbl. 6, 350]. Theorem 2 states that if B is conjugate to A on g , and if the parameters α in (1) are properly selected, the portion of the envelope of the family near B corresponding to extremals of the family near g is determined by a certain number r of real single-valued continuous functions $s = s_k(\alpha)$ which are analytic except at most on analytic loci of dimension $p < m - 1$. Theorem 3 (to which most of the paper is devoted) omits the requirement that the integrand F be analytic. It is supposed that B , the second end point of g , is the first conjugate point of A on g , that the strengthened Weierstrass and Legendre conditions hold along g , that the portion of the envelope of the family (1) lying near B and corresponding to extremals of the family sufficiently near g lies outside the backward nappe of a sufficiently small cone with vertex at B and axis tangent to g , and that no extremal

of the family different from g and near g passes through B . Then g affords a proper strong relative minimum for J . From the proof it is obvious that the theorem holds also for integrals in non-parametric form, provided that as usual the strengthened Weierstrass condition is assumed to hold near the extremal g . With reference to Lemma 3 it may be noted that the Hilbert integral is not in general zero along the extremal g unless the integrand F is appropriately modified. However, this does not affect the later part of the proof, as only the invariance of the Hilbert integral is needed. For variation problems in the plane, the relation between the behavior of the envelope and the existence of a minimum was examined by Osgood [Trans. Amer. Math. Soc. 2, 166—182 (1901)]. In the case of space of higher dimensions treated in this paper the behavior of the envelope may be a great deal more complicated. Graves (Chicago).

Hestenes, M. R.: Minimax principle for functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 115—119 (1936).

An outline is given of "an extension of the generalized minimax principal recently enunciated by Birkhoff and Hestenes" (this Zbl. 11, 166). No proofs are given. Minimax sets are introduced. "A minimax set is essentially the analogue of one or more non-degenerate critical points." Let $f(x)$, assumed lower semi-continuous, be defined on a metric space Ω . If X^k is a chain on Ω , $F(X^k)$ is the l. u. b. of the values of $f(x)$ on the locus of X^k . BX^k denotes the boundary of X^k , and while the modulo 2 case is taken, boundaries are not reduced modulo 2. The functional homology $X^k \approx 0$ means that there are chains X^{k+1} and Z^k on $f \leq F(X^k)$ and $f \leq F(BX^k)$ respectively, such that $BX^{k+1} = X^k + Z^k$. Functional connectivity numbers can be introduced, and if M^k denotes the k -th one, and R^k the k -th ordinary connectivity number (Betti number mod. 2) of Ω , then

$$M^k - M^{k-1} + \dots + (-1)^k M^0 \geq R^k - R^{k-1} + \dots + (-1)^k R^0.$$

Next minimax chains are introduced, and by use of them type numbers are defined. The definitions are too lengthy to be given here. The type number of the class of all minimax k -chains on Ω is $\leq M^k$. If it is finite, it equals M^k (Theorem 4). Despite the remarks in the author's introduction, the paper seems to contain no statement directly connecting the results with the theory of critical points of a real function of n variables. A. B. Brown (New York).

Funktionentheorie :

Montel, Paul: Sur un théorème de M. Pompeiu. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 182—183 (1935).

Ankündigung des folgenden Satzes, der eine Bemerkung von Pompeiu (vgl. dies. Zbl. 3, 300 u. 6, 407, Errera) verschärft: $f(z)$ sei regulär in einem abgeschlossenen Bereich D , der von einer Jordankurve C berandet wird. Dann ist der Wertevorrat des Differenzenquotienten von f für die Punktpaare im Innern von D gleich seinem Wertevorrat für die Punktpaare auf C . Ferner: Ist $f(z)$ in α regulär, so gibt es in jeder Umgebung von α solche $n+1$ Punkte, daß die n -te dividierte Differenz von f für diese Punkte gleich der n -ten Ableitung von f in α , dividiert durch $n!$, ist. *Fenchel*.

Mazurkiewicz, S.: Sur le théorème de Rouché. C. R. Soc. Sci. Varsovie 28, 78 bis 79 (1936).

$f(z)$ und $\varphi(z)$ seien in dem beschränkten Bereiche B regulär und stetig am Rande, wo $|f(z)| > |\varphi(z)|$ vorausgesetzt ist. Der übliche Beweis des Rouchéschen Satzes (vgl. etwa Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie I) beruht auf der Anwendung des Argumentenprinzips auf $f(z) + \varphi(z) = f(z) \left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right)$. Verf. gibt eine leichte Variante dieses Beweises, indem er aus der Darstellung der Nullstellenanzahl von $f(z) + \lambda \varphi(z)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, als Residuenintegral deren Stetigkeit also Konstanz in B unmittelbar entnimmt. Rogosinski (Königsberg).

Nabetani, Kenjirô: Remarks on some theorems concerning sections of a power series. I. Tôhoku Math. J. **41**, 329—332 (1936).

$f(z)$ sei für $|z| = r < 1$ regulär und $s_n(z)$ bezeichne den n -ten Abschnitt der Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ daselbst. Bewiesen wird, daß die obere Grenze von

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{s_0(re^{i\vartheta}) + s_1(re^{i\vartheta}) + \dots + s_n(re^{i\vartheta})}{n+1} \right|^2 d\vartheta, \quad \int_0^{2\pi} \left[\frac{|s_0(re^{i\vartheta})| + |s_1(re^{i\vartheta})| + \dots + |s_n(re^{i\vartheta})|}{n+1} \right]^2 d\vartheta,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{|s_0(re^{i\vartheta})|^2 + |s_1(re^{i\vartheta})|^2 + \dots + |s_n(re^{i\vartheta})|^2}{n+1} d\vartheta \quad \text{mit} \quad \int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^2 d\vartheta, \quad \text{die von}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{|s_0(re^{i\vartheta}) + s_1(re^{i\vartheta}) + \dots + s_n(re^{i\vartheta})|}{n+1} d\vartheta \quad \text{mit} \quad \int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})| d\vartheta \quad \text{zusammenfällt. Ferner}$$

$$\text{gilt} \int_0^{2\pi} \left| s_n\left(\frac{r}{2} e^{i\vartheta}\right) \right| d\vartheta \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})| d\vartheta. \quad (\text{Vgl. Landau, Darstellung und Begründung}$$

einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. 1929). Rogosinski (Königsberg).

Nabetani, Kenjirô: Remarks on some theorems concerning sections of a power series. II. Tôhoku Math. J. **41**, 333—336 (1936).

Verallgemeinerung der in I. (vgl. vorst. Ref.) bewiesenen Ergebnisse auf p -te Integralmittel der arithmetischen Abschnittsmittel. Ferner gilt in Verallgemeinerung der bekannten Landauschen oberen Grenze der $s_n(z)$:

$$\int_0^{2\pi} |s_n(re^{i\vartheta})|^p d\vartheta \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^p d\vartheta \cdot \left(\sum_0^n \binom{-\frac{1}{p}}{v} \right)^p; \quad p \geq 1.$$

Rogosinski (Königsberg).

Rosenblatt, Alfred, und Stanislaw Turski: Sur la représentation conforme de domaines plans. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 899—901 (1936).

Weinstein, A.: Sur la démonstration donnée par Schläfli de la formule de Schwarz-Christoffel. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 17) **52**, 288—290 (1935).

Kasner, Edward: A complete characterization of the derivative of a polygenic function. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **22**, 172—177 (1936).

Verf. versteht unter einer polygenen Funktion eine Funktion $w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$, mit differenzierbarem φ und ψ . Die Ableitung $\frac{dw}{dz}$ hängt natürlich noch von der Richtung ϑ der Annäherung ab, so daß es sich um eine Abbildung der Linienelemente (z, ϑ) auf die w -Ebene handelt. Verf. gibt für diese Abbildung drei einfache charakteristische Eigenschaften an [vgl. Kasner, Science **66** (1927); Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **13** (1928); Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928)].

Rogosinski (Königsberg).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Fréchet, Maurice: Solution générale de l'équation de Chapman-Kolmogoroff. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **5**, 143—158 (1936).

V étant un ensemble mesurable dans l'espace à v dimensions l'équation de Chapman-Kolmogoroff relative à V est

$$F(M, s; P, t) = \int_V F(M, s; Q, u) F(Q, u; P, t) dQ, \quad s < u < t(C)$$

M, P , et Q étant trois points de V . Dans le problème de probabilités qui conduit à cette équation, F est une densité de probabilité. Ce qui est important de déterminer c'est la probabilité

$$\bar{\omega}(M, s; v, t) = \int_v F(M, s; P, t) dP$$

où v est une portion quelconque (mesurable) de V . Soient $X_1(P), X_2(P), \dots$ une infinité de fonctions qui forment un système orthonormé et complet dans V et supposons que les fonctions $f_{jk}(s, t)$ ($j, h = 1, 2, 3, \dots$) satisfont à la condition

$$f_{jk}(s, t) = \sum_i f_{ji}(s, u) f_{ih}(u, t), \quad s < u < t$$

la série double $\sum_{j,k} f_{jk}^2(s, t)$ étant convergente pour $s < t$. Alors la série $\sum_{j,k} f_{jk}(s, t) X_j(M) X_k(P)$ converge en double moyenne quadratique vers une fonction $F(M, s; P, t)$ de carré doublement sommable sur V et cette fonction vérifie l'équation

$$F(M, s; P, t) \cong \int_V F(M, s; Q, u) F(Q, u; P, t) dQ \quad (C_g)$$

pour $s < u < t$. L'auteur montre comment on peut déduire, une fonction F satisfaisant à (C_g) étant donnée, une fonction $\tilde{\omega}$ donnant la probabilité totale. Il étudie encore d'autres manières de réduire la solution de C et il trouve une formule donnant la solution la plus générale de (C_g) relative à un domaine V à ν dimensions si l'on connaît la solution la plus générale de l'équation analogue relative à un segment rectiligne. Dans une introduction il expose les propriétés des fonctions de carrés doublement sommables.

B. Hostinský (Brno).

Fréchet, M.: Sul caso positivamente regolare nel problema delle probabilità concatenate. Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 28—35 (1936).

Quelques compléments au mémoire de l'auteur consacré aux chaînes de Markoff (ce Zbl. 6, 67).

A. Kolmogoroff (Moskau).

Hostinsky, B.: Sur les probabilités en chaîne. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1000 bis 1002 (1936).

Verf. zeigt, daß verschiedene Urnenaufgaben, die seit Markoff von mehreren Autoren hinsichtlich ihrer Grenzrelationen untersucht worden waren, sich in ein einziges Schema aus der Theorie der Markoffschen Ketten einordnen lassen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind von der Versuchsnummer abhängig, und die Anzahl der möglichen Zustände wächst mit der Versuchsnummer ins Unendliche.

A. Khintchine (Saratow).

Isserlis, L.: Inverse probability. J. Roy. Statist. Soc., N. s. 99, 130—137 (1936).

In this paper it is held that the difficulties that have arisen in the application of the theory of inverse probability come from the fact that the wrong question is frequently put with the consequence that the answer is unintelligible. Bayes' theorem regarding the "probability of a future event" is developed from definitions and postulates. It is recognized that the occasions are rare in which the postulates are all satisfied by useful applications. After indicating that the theory accepted by Laplace was brought into disrepute rightfully because of the lack of knowledge about the distribution of the probabilities before the event in question and because of attempts to show that the results based on Bayes's theorem are very nearly the same whatever (plausible) initial distribution is assumed. Then follows a treatment of the problem in support of the view that those are unduly pessimistic who hold with R. A. Fisher that "we do not and cannot know from the information supplied by the sample anything about the probability that the probability in question should lie between any named values".

H. L. Rietz (Iowa).

Lurquin, C.: Sur l'algèbre des variables éventuelles. II. comm. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 279—289 (1936).

I. s. dies. Zbl. 11, 125.

Bartlett, M. S.: Statistical information and properties of sufficiency. Proc. Roy. Soc. London A 154, 124—137 (1936).

The paper presents an exposition of the concept, introduced by R. A. Fisher, of the amount of statistical information in the estimation of a statistical parameter from a sample, with special reference to properties of sufficiency in the small sample

theory of the estimation. The sufficiency properties are extended to cover estimation involving more than one unknown. *H. L. Rietz (Iowa).*

Taucer, R.: I fenomeni di selezione e la teoria dei gruppi. Giorn. Ist. Ital. Attuari **7**, 16—27 (1936).

Eine Bevölkerung werde in n Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ eingeteilt; es seien gegeben: 1. die Wahrscheinlichkeiten $\mu_i(x, \xi) dx$ dafür, daß ein Individuum, welches die Gruppe Γ_i im Alter ξ betrat, in einem zwischen x und $x + dx$ gelegenen Alter sterben wird, und 2. die Wahrscheinlichkeiten $\alpha_{ij}(x, \xi) dx$ dafür, daß ein Individuum, welches die Gruppe Γ_i im Alter ξ betrat, in einem zwischen x und $x + dx$ liegenden Alter in die Gruppe Γ_j übergehen wird. Gesucht wird die Anzahl $l_i(x, \xi) d\xi$ der Individuen vom Alter x , die die Gruppe Γ_i in einem zwischen ξ und $\xi + d\xi$ liegenden Alter betreten haben, sowie die vollständige Anzahl $l_i(x)$ der Individuen vom Alter x , die der Gruppe Γ_i angehören. Das Problem wird auf ein System von n Volterraschen Integralgleichungen zweiter Art zurückgeführt, dessen Lösung nach der üblichen Iterationsmethode erfolgen kann. Spezialfälle werden besprochen. *A. Khintchine.*

Pomerantzewa-Iljinskaja, E.: On the significance of a mean in small samples with the new tables of T , the inverse function of the „students“ integral. J. Geophys., Moskau **6**, 34—49 u. engl. Zusammenfassung 49 (1936) [Russisch].

Für ein von Student [Biometrika **6**, 1—25 (1908)] herrührendes Verteilungsgesetz werden Tabellen berechnet und verschiedene Anwendungen angedeutet.

A. Khintchine (Saratow).

Teodoresco, C. C.: Note sur la corrélation. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj **9**, 294—299 (1935).

Ohne jede weitere Begründung will Verf. den Pearsonschen Korrelationskoeffizienten r durch $1 - r^2$ ersetzen. Die Existenz negativer Korrelationen scheint ihm demnach entgangen zu sein.

W. Feller (Stockholm).

Kolmogoroff, A.: Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza. Giorn. Ist. Ital. Attuari **7**, 74—80 (1936).

Die Arbeit ist einer qualitativen Analyse der Volterraschen Differentialgleichungen für den Kampf ums Dasein gewidmet. Im Gegensatz zu den bisherigen Untersuchungen werden über die vorkommenden Funktionen nur Voraussetzungen allgemeiner Natur gemacht und daraus weitgehende und wichtige Schlüsse über den Verlauf der Lösungen gezogen. Die Wiedergabe der Einzelheiten ist hier unmöglich.

A. Khintchine.

Geometrie.

Steck, Max: Die Abhängigkeit der Vertauschungssaxiome und das Hessenbergsche Ergebnis. Geometrische Axiomatik als Gruppentheorie. Deutsche Math. **1**, 165—174 (1936).

Es wird gezeigt, daß das kleine Vertauschungssaxiom mit dem Desarguesschen Satz, das große Vertauschungssaxiom mit dem Pascalschen Satz für das Geradenpaar äquivalent ist; ferner wird im Anschluß an Hessenberg das kleine Vertauschungssaxiom durch dreimalige Anwendung des großen Vertauschungssaxioms bewiesen. (Vgl. die früheren Arbeiten des Verf., s. dies. Zbl. **5**, 406; **10**, 73; **12**, 175; **12**, 412.) *Moufang.*

Nakasawa, Takeo: Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit. II. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A **3**, 45—69 (1936).

Dem Axiomensystem des I. Teils (s. dies. Zbl. **12**, 220) werden zwei Axiome hinzugefügt, von denen eines im Gegensatz zu den übrigen ein Existenzaxiom ist und weitere Struktursätze, insbesondere Zerlegungssätze, des durch die Axiome definierten sog. zweiten Verknüpfungsraumes kalkülmäßig bewiesen.

R. Moufang.

Sz. Nagy, Julius v.: Zur Theorie der geometrischen Konstruktionen. Tôhoku Math. J. **41**, 423 (1936).

Der Verf. gab in Tôhoku Math. J. **40**, 76—78 (1935), dies. Zbl. **11**, 35, eine Erweiterung des Steinerschen Satzes über Konstruktionen mit dem Lineal, welche er

für neu hielt. Der Ref. bemerkte damals schon, daß der bez. Satz 1904 von Severi bewiesen worden ist. Der Verf. kommt in einer kurzen Note auf die Sache zurück und nennt neben dem Severischen Beweis noch zwei andere Arbeiten über den Gegenstand.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Kodera, Tôkichi: New proofs of two theorems concerning the Feuerbach point of the triangle. Tôhoku Math. J. 41, 455—457 (1936).

The Feuerbach point of a triangle ABC is the point of contact of the nine-point circle and the in-circle. The author gives new proofs of two theorems due to Gallatly (1908, 1909): (1) If M_1, M_2, M_3 are the midpoints of the sides of ABC , then one of the three distances FM_i is equal to the sum of the two remaining ones. (2) If A', B', C' are the feet of the perpendiculars dropped from A, B, C on the opposite sides, then the joins of the in-centre and the circum-centre of the triangles $AB'C', BC'A', CA'B'$ meet at F .

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Thébault, V.: Tétraèdre bordé de prismes droits. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 236—243 (1935).

L'auteur construit sur les faces BCD etc. d'un tétraèdre T des prismes droits $BCDB_aC_aD_a$ etc. dont les hauteurs sont proportionnelles aux aires des faces BCD etc. Les hauteurs AA' etc. de T percent les plans des triangles $A_bA_cA_d$ etc. en leurs centres de gravité G'_a etc. Les plans $B_aC_aD_a$ etc. suffisamment prolongés, déterminent un tétraèdre T_1 , homothétique à T . Le centre de similitude L est le point du minimum de la somme des carrés des distances aux plans des faces de T . Les médianes AG'_a etc. de T sont normales aux plans des triangles $B_aC_aD_a$ etc. Les volumes des tétraèdres $AA_bA_cA_d$ etc. sont équivalents. Des sommets de chacun des triangles $A_bA_cA_d$ etc. on trace des perpendiculaires sur les plans de ces triangles; ces droites prises trois par trois, concourent en des points $A_2B_2C_2D_2$. Le tétraèdre T_2 a pour centre de gravité le point G et les aires de ses faces sont proportionnelles aux médianes de T . Le centre de la sphère circonscrite de T_2 est situé sur GL . L'auteur considère le polyèdre dont les sommets sont ceux des quatre triangles $B_aC_aD_a$ etc. et détermine le volume de ce solide.

O. Bottema (Deventer, Holland).

Delens, Paul: Du cercle aux coniques; l'association isotrope. Bull. Soc. Math. France 63, 231—245 (1935).

Im Raume sei ein Paar konjugiert-komplexer Geraden α', β' einer Ebene W gegeben. Man kann durch ihren Schnittpunkt O zwei reelle Geraden Φ, Φ' so legen, daß die in ihnen erklärten Rechtwinkelinvolutionen aus W die elliptische Involution mit den Ruhegeraden α', β' ausschneiden. A liege nun im Innern eines in der Ebene W gezeichneten Kreises. Dann laufen von A aus zwei konjugiert-komplexe Tangenten α', β' an den Kreis. Sie werden auf zwei reelle Geraden Φ, Φ' abgebildet, die Fokalgeraden des Punktes A bezüglich des Kreises. Ist jetzt B der bezüglich des Kreises zu A konjugierte und M ein auf dem Kreise laufender Punkt, so besteht für M die Beziehung $MA:MB=c$. Projiziert man M auf den Punkt P von Φ und den Punkt H der Kreispolaren Δ von A , so ergibt sich aus dieser Beziehung die Relation $MP:MH=\text{konst.}$, wo MP und MH die Abstände des Punktes M von der Geraden Φ und Δ bezeichnen. Die Relation führt, projektiv verallgemeinert, zu einer neuen Definition des Kegelschnitts. Dies ist der Ausgangspunkt eines Vortrages von Lebesgue [Bull. Soc. Math. France 63 (1935); dies. Zbl. 12, 31]. Lebesgue verwendet reelle Beweise. Der Verf. benutzt konsequent komplexe Hilfsmittel und gibt weitere Anwendungen der Fokalgeraden.

E. A. Weiss (Bonn).

Deaux, R.: Sur un complexe quadratique déduit d'un complexe linéaire. Mathesis 50, 117—120 (1936).

Ein linearer Komplex sei vorgegeben. Die Gerade d_1 sei zur Geraden d_2 in bezug auf den Komplex konjugiert. Der Ort aller Geraden d_1 derart, daß das Verhältnis der Momente einer beliebigen Geraden des Komplexes und der Geraden d_1, d_2 konstant ist, ist ein quadratischer Komplex. Er kann auch als Ort aller Geraden ge-

wonnen werden, deren Momente in bezug auf zwei involutorische koaxiale lineare Komplexe ein konstantes Produkt haben. Die Singularitätenfläche des Komplexes zerfällt in einen Kreiszylinder und die doppeltzählende uneigentliche Ebene. Der Komplex ist projektiv äquivalent mit einem von C. Segre behandelten Komplex [C. Segre, Crelles J. **97**, 95—110 (1884)]. E. A. Weiss (Bonn).

Franck, P.: Über Kugelkomplexe. II. Mitt. math. Ges. Hamburg **7**, 312—317 (1936).

Im ersten Abschnitt werden die linearen Kugelkomplexe klassifiziert. Dabei werden als zentrisch solche Komplexe bezeichnet, die aus allen Kugeln bestehen, die eine feste Kugel unter festem Winkel schneiden. Im zweiten Abschnitt werden im Anschluß an eine frühere Arbeit (vgl. dies. Zbl. **6**, 217) die zu den zentrischen linearen Komplexen gehörigen partiellen Differentialgleichungen und Mongeschen Gleichungen aufgestellt. Im dritten Abschnitt werden für elliptische lineare Kugelkomplexe (Komplexinvariante $I > 0$) folgende Sätze bewiesen: Die Normalebene der Komplexkurven berühren eine feste Kugel. Komplexkurven, welche durch ein und denselben Punkt laufen und in diesem Punkte dieselbe rektifizierende Ebene besitzen, haben in diesem Punkte dieselbe erste Krümmung. Es ergibt sich eine Differentialrelation von 5. Ordnung als Bedingung dafür, daß die Tangenten einer Raumkurve einem zentrischen linearen Komplex angehören. — Da I relative Invariante ist, kann der Wert von I eine geometrische Bedeutung nicht besitzen. Daher ist Gleichung (12') und der Schluß von Satz 1 falsch. Der Fehler entsteht durch Fortlassen eines Proportionalitätsfaktors in der Gleichung nach (11). E. A. Weiss (Bonn).

Miyazaki, Sadataka: Über einen Satz, der dem Mongeschen Satze entspricht. Tôhoku Math. J. **41**, 349—355 (1936).

Die Umformung des Mongeschen Satzes, die Verf. mit analytischen Methoden beweist, ist die folgende: Sind K_1, K_2, K_3 drei punktfremde, nichtkonzentrische Kreise einer Ebene, so schneiden sich die drei Paare von Gegenseiten eines Sechsecks, das entweder von den drei Paaren äußerer gemeinsamer Tangenten der K_i ($i = 1, 2, 3$) oder von einem Paar äußerer K_1, K_2 -Tangenten und von den zwei Paaren innerer K_3 -Tangenten gebildet wird, in Punkten einer Geraden. Zu dieser „Pascal-Aussage“ gilt auch die dual entsprechende „Brianchon-Aussage“, die sich folgendermaßen auf Kurven zweiter Ordnung erweitern läßt: Sind S_i ($i = 1, 2, 3$) ähnliche und ähnlich gelegene Kurven zweiter Ordnung und k_1 diejenige Kurve zweiter Ordnung, die je in den Endpunkten einer Sehne von S_1 und einer dazu parallelen Sehne von S_2 die Kurven S_1, S_2 berührt, sind ferner k_2 und k_3 die auf S_2, S_3 bzw. S_3, S_1 analog bezogenen Kurven zweiter Ordnung, so berührt jede der k_i ($i = 1, 2, 3$) eine Kurve zweiter Ordnung doppelt. Auch der Beweis dieses Satzes wird rein rechnerisch erbracht. Die ausführliche Behandlung von Sonderfällen, die für spezielle Lagen der in den Sätzen vorkommenden Elemente eintreten, zeigt die geometrische Tragweite der Aussagen. Der erstere Satz gilt z. B. auch dann, wenn die Mittelpunkte der drei Kreise kollinear liegen, sofern nur die bezüglichen Tangenten ein Sechseck bilden. Derselbe Satz ist mit der Aussage des Nagelschen Satzes dann gleichbedeutend, wenn das Sechseck zu einem Dreieck schrumpft, das drei innere Ähnlichkeitspunkte besitzt.

Steck (München).

Bompiani, Enrico: Costruzioni grafiche dei piani osculatori ad una curva sghemba. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **68**, 911—936 (1935).

Da eine Schmiegeebene σ einer Raumkurve mit dieser projektiv-invariant verknüpft ist, muß vom Standpunkt der projektiven Geometrie die Forderung erhoben werden, die Konstruktion von σ auf projektiv-invariante Begriffsbildungen zu gründen. Der Verf. zeigt mehrere derartige Konstruktionen, die auf Projektivitäten oder projektiven Invarianten beruhen. Wird das Linienelement 2. Ordn. E^2 , dessen Ebene σ zu konstruieren ist, aus zwei Zentren auf eine oder zwei Bildebenen projiziert (bizentrale Projektion, Grund- und Aufriß einer Raumkurve), so erhält man zwei Linienelemente 2. Ordn., deren projektive Invariante die Ebene σ zu konstruieren gestattet. Gehört

das Linienelement 2. Ordn. E^2 der Schnittkurve von zwei Flächen Φ_1 und Φ_2 an, so schneiden die Tangentialebenen von Φ_1 und Φ_2 im Punkt P von E^2 Φ_2 bzw. Φ_1 in Kurven s_1, s_2 . Die Linienelemente 2. Ordn. S_1^2, S_2^2 von s_1, s_2 , die mit E^2 den Punkt P und die Tangente gemeinsam haben, bestimmen die Ebene σ von E^2 . Vom projektiven Standpunkt ist diese Aufgabe nicht zu trennen von der Ermittlung der Halphenschen Ebene α von S_1^2, S_2^2 (aus deren Punkten s_1, s_2 durch einander oskulierende Kegel projiziert werden), da α und σ von den Ebenen von S_1^2 und S_2^2 harmonisch getrennt werden.

E. Kruppa (Wien).

Krames, Josef: Die zyklographische Abbildung der Böschungskurven auf Drehflächen zweiten Grades mit lotrechter Achse. S.-B. Akad. Wiss. Wien 1936, 645—661 (H. 9/10).

Fußend auf einer Arbeit von W. Blaschke, Bemerkungen über allgemeine Schraublinien, Mh. Math. Phys. 19 (1908), untersucht der Verf. die zyklographische Abbildung der Böschungslinien (Kurven konstanter Steilheit) auf Drehflächen 2. Ord. mit lotrechter Achse. Dabei ist entweder die Raumkurve k gegeben und ihr zyklographisches Bildpaar (k^1, k^2) zu suchen, oder es ist (k^1, k^2) gegeben und die Gesamtheit des zugehörigen k zu ermitteln. Die Ergebnisse beruhen auf der vom Verf. gemachten Bemerkung, daß die zyklographischen Bildkurven k^1, k^2 einer Böschungskurve k Evolutoiden einer Evolvente ihres Grundrisses k' sind. Auf diesem Wege ergeben sich u. a. Sätze über Epi-, Hypo-, Hyper- und Parazykloiden. *E. Kruppa* (Wien).

Aumann, Georg: Über Schnitteigenschaften konvexer Punktfolgen im R_3 . Deutsche Math. 1, 162—165 (1936).

Ist jeder ebene Schnitt der offenen Punktmenge G im R_3 einfach zusammenhängend, dann ist G konvex. Dies ist von Schreier (vgl. dies. Zbl. 8, 78) bewiesen worden, falls G beschränkt ist und (was im genannten Ref. nicht hervorgehoben wurde) falls alle Randpunkte von G zugleich Randpunkte der Komplementärmenge von G sind. (Bei beliebigen beschränkten offenen Mengen liefert der Schreiersche Beweis nur, daß die abgeschlossene Hülle von G konvex ist.) Der obige Satz und der vom Verf. früher (vgl. dies. Zbl. 13, 32) direkt bewiesene entsprechende Satz für beschränkte abgeschlossene Mengen werden hier durch Projektion aus einem verwandten Satz für offene Mengen der dreidimensionalen Kugel S_3 gewonnen. Unter S_1 bzw. S_2 verstehe man entweder a) die Kreise bzw. Kugeln in S_3 , die durch einen festen Punkt von S_3 gehen, oder b) die Großkreise bzw. Großkugeln von S_3 . Dann lautet der Satz: Eine offene Punktmenge G von S_3 , die von jedem S_2 in einem einfach zusammenhängenden Gebiet geschnitten wird, hat mit jedem S_1 ein zusammenhängendes Stück gemein.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Mayer, Anton E.: Eine einfache Abschätzung der Konkavität. Tôhoku Math. J. 41, 435—437 (1936).

Ist A eine beliebige beschränkte Menge und A_k ihre konvexe Hülle, so wird als Maß des Nichtkonvexseins von A

$$h(A) = \begin{array}{cc} \text{Obere Grenze} & \text{Untere Grenze } pq \\ p \subset A_k & q \subset A \end{array}$$

eingeführt, wo pq den euklidischen Abstand der Punkte p und q bezeichnet. $h(A)$ ist 0 für konvexe Mengen und (bei abgeschlossenen A) auch nur für diese. Ist $R(A)$ der Umkugelradius von A (Radius der kleinsten die Menge A enthaltenden Kugel), so gilt stets $h(A) \leq R(A)$. Das Gleichheitszeichen steht für die und nur die Mengen, die ganz auf dem Rande ihrer Umkugel liegen. Diese Mengen sind auch in einem von Menger angegebenen Sinne „am wenigsten konvex“.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Errera, A.: Sur un problème de géométrie infinitésimale. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 234—235 (1935).

Kurzer Bericht über das in dies. Zbl. 7, 129 genannte Problem für ein ebenes Gebiet.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Algebraische Geometrie:

Chisini, O.: Sulla curva di diramazione dei piani multipli. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 22—27 (1936).

In a previous paper (this Zbl. 9, 407) the author has shown how to construct a plane algebraic curve which is the branch-curve of an n -ple plane. In the present note he shows that all the n -ple planes obtained from a surface of order n without multiple curves, or from a surface of order $n + r$ with an r -ple point and no multiple curves (distinct or infinitely near to the r -ple point) possess branch curves of this type. The details of the proof are given in the case of the quadruple plane obtained by projecting a quartic surface, the general proof presenting no novel features. *Todd.*

Daus, P. H.: Isogonal and isotomic conjugates and their projective generalization. Amer. Math. Monthly 43, 160—164 (1936).

The well known quadratic Cremona transformation in the projective plane.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Coble, Arthur B.: Groups of Cremona transformations in space of planar type. Duke math. J. 2, 1—9 (1936).

Es sei C die Schnittkurve einer Quadrik und einer Fläche 3. Ordnung; drei Flächen 3. Ordnung, die C enthalten, haben noch drei Punkte gemein, die auf einer Geraden liegen; die ∞^3 Flächen 3. Ordnung, die C und einen allgemeinen festen Punkt P enthalten, definieren also eine räumliche Involution I_P von Punktepaaren, deren Verbindungsgeraden alle durch P hindurchgehen. I_P verwandelt die Ebenen des Raumes in Flächen 4. Ordnung, die C enthalten und für die P ein dreifacher Punkt ist. Wenn jetzt C festgehalten wird und verschiedene Punkte $P_1 P_2 \dots$ im Raume gewählt werden, so erzeugen die Involutionen $I_{P_1} I_{P_2} \dots$ eine Gruppe G räumlicher Cremonascher Verwandtschaften; die allgemeine Transformation von G verwandelt die Ebenen in Flächen der Ordnung $3x_0 - 2$, für die C die Multiplizität $x_0 - 1$ und gewisse Punkte p_i gewisse Multiplizitäten $3x_1, 3x_2, \dots$ besitzen; und es ist immer $L = x_0 - x_1 - x_2 - \dots = 1$. Die Gruppe G enthält auch die identische Kollineation für folgende Werte der x_i : $x_0 = 1, x_1 = x_2 = \dots = 0$; aus diesen besonderen Werten der x_i erhält man die Werte der x_i , die einer anderen Transformation von G entsprechen, durch Anwendung gewisser linearer Involutionen mit ganzzahligen Koeffizienten, die eine lineare Gruppe g erzeugen; g besitzt die Invarianten $L = x_0 - x_1 - x_2 - \dots, Q = x_0^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - \dots$. Beziehungen zwischen G und g . Die Ordnung y einer Fläche und ihre Multiplizitäten $y_0 y_1 y_2 \dots$ auf C und in $p_1 p_2 \dots$ werden durch eine Transformation von G in $y' y'_0 y'_1 y'_2 \dots$ verwandelt; zwischen $y y_i$ und $y' y'_i$ besteht ebenfalls eine lineare Transformation, die aus der entsprechenden zwischen x_i, x'_i durch eine sehr einfache lineare Transformation entsteht. — Alles das erinnert an die Erzeugung der ebenen Cremonaschen Verwandtschaften durch quadratische Transformationen und an die Erzeugung der räumlichen regulären Transformationen: 1. Es gibt stets eine unendliche stetige Reihe erzeugender Transformationen aller derselben Art; 2. jede Transformation der Gruppe hängt von der Wahl gewisser ganzzahliger und gewisser anderer stetig veränderlicher Parameter ab; 3. mit der Gruppe ist eine Gruppe linearer Transformationen mit ganzzahligen Koeffizienten verbunden, die eine lineare und eine quadratische Invariante besitzt. Es sind diese die Eigenschaften, die die Gruppen „planarer Art“ des Titels definieren.

E. G. Togliatti (Genova).

Bianca, Grazia: Di una classe di V_3 nell' S_5 . Catania: Tip. Enrico Giandomfo. 1934. 12 pag.

Einige Bemerkungen über die V_3 eines fünfdimensionalen Raumes, Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte einer (l, l') -Verwandtschaft zwischen zwei Ebenen. Insbesondere $l = l' = 2$.

E. G. Togliatti (Genova).

Todd, J. A.: On double integrals of the first kind attached to an algebraic variety. J. London Math. Soc. 11, 35—37 (1936).

The following criterion dealing with algebraic $(2d - 2)$ -cycles on an algebraic

variety V_d is derived: A necessary and sufficient condition that every $(2d-2)$ -cycle on V_d be algebraic is that V_d should possess no double integrals of the first kind. An implication of this theorem is to the effect that if the sum $g_2 + g_3$ of the irregularities of a V_3 vanishes (for instance, if V_3 is in S_4 and is free from singularities affecting the adjoint varieties), then every 4-cycle on V_3 is algebraic, and algebraic and topological bases coincide. It is also pointed out that the Severi base number for algebraic $(2d-2)$ -cycles is equal to the number of independent Γ_2 with respect to which every double integral of the first kind has zero periods. These theorems are consequences of certain results by Hodge and of Severi's theory of the base for V_k 's on V_d (used exclusively in the cases $k=1$ and $k=d-1$).
O. Zariski (Baltimore).

Differentialgeometrie:

Graustein, W. C.: A new form of the four-vertex theorem. *Mh. Math. Phys.* 43, 381—384 (1936).

Mit Hilfe einer kleinen Abänderung des Beweises von Herglotz (vgl. Blaschke, Differentialgeometrie, Bd. 1, § 12, 3. Aufl. 1930) wird der Vierscheitelsatz in der folgenden verschärften Form gewonnen: Die Anzahl der primären Scheitel eines Ovals ist um wenigstens 4 größer als die der sekundären. Hierbei heißt eine Maximumstelle (Minimumstelle) der Krümmung ein primärer Scheitel, wenn die Krümmung dort größer (kleiner) als die „durchschnittliche Krümmung“ $2\pi/L$ ist, wo L den Umfang des Ovals bezeichnet; alle übrigen Scheitel heißen sekundär. — Es sei bemerkt, daß diese Verschärfung auch unmittelbar aus Ergebnissen von Bose (dies. Zbl. 3, 409), Mukhopadhyaya (dies. Zbl. 9, 321) und Segre (dies. Zbl. 10, 371) entnommen werden kann.
W. Fenchel (Kopenhagen).

Takasu, Tsurusaburô: Vierscheitelsatz für Raumkurven. II. *Tôhoku Math. J.* 41, 317—319 (1936).

Im ersten Teil der Arbeit (vgl. dies. Zbl. 9, 321) hat Verf. den Vierscheitelsatz für Kurven auf der Kugel unter recht starken Voraussetzungen bewiesen und daraus einen „Dualvierscheitelsatz“ für Raumkurven gefolgert. Hier bemerkt er, daß sich auf Grund seiner eigenen und der Ergebnisse von Fog über den Vierscheitelsatz für sphärische Kurven (vgl. dies. Zbl. 8, 175 u. 6, 216) ein allgemeinerer Dualvierscheitelsatz aussprechen läßt.
W. Fenchel (Kopenhagen).

Fon, Te-Chih: A characteristic property of curves of constant torsion. *Tôhoku Math. J.* 41, 451—454 (1936).

Drei konsekutive Binormalen einer Raumkurve bestimmen eine Regelfläche 2. Ordnung. Eine Raumkurve hat dann und nur dann konstante Torsion, wenn die Schmiegenebene jedes Kurvenpunktes durch den Mittelpunkt der zu diesem Punkt gehörigen Fläche 2. Ordnung geht. Ferner wird mit Hilfe dieser Flächen 2. Ordnung gezeigt, daß zwei (nichtebene) Raumkurven identisch sind, wenn sie gemeinsame Binormalen haben, was sich ja auch daraus ergibt, daß jede Raumkurve die Kehllinie der von ihren Binormalen gebildeten Regelfläche ist.
W. Fenchel (Kopenhagen).

Nicolesco, Alex.: Courbes sphériques, courbes d'Enneper et de M. Tzitzéica. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) *Mathematica, Cluj* 9, 244—248 (1935).

Die Raumkurven, deren Schmiegenebenen eine feste Kugel berühren, sind von Enneper untersucht worden. Der Ort der Berührungspunkte der Schmiegenebenen auf der Kugel ist (wenn der Kugelradius ohne wesentliche Beschränkung $=1$ gewählt wird) offenbar das Binormalenbild einer solchen Kurve. Verf. zeigt, daß man aus dem willkürlich vorgegebenen Binormalenbild V die zugehörige Ennepersche Kurve in folgender Weise erhält: Von jedem Punkt P der sphärischen Kurve V aus trage man auf der die Kugel berührenden Normale von V in geeignetem Sinne $\cotg \lambda$ ab, wo λ den Winkel zwischen der Schmiegenebene von V in P und dem nach P führenden Kugelradius bezeichnet. Dieses Ergebnis wird zu weiteren bekannten charakteristi-

schen Eigenschaften der Enneperschen Kurven in Beziehung gesetzt. Ennepersche Kurven mit konstanter Windung gehören zu einer von Tzitzéica betrachteten Kurvenklasse. W. Fenchel (Kopenhagen).

Bompiani, E.: Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 483—491 (1935).

Dans cette Note l'A. annonce un travail organique sur la théorie des invariants projectifs différentiels, finis ou infinitésimes, et il donne un grand nombre de résultats intéressants sur ce sujet; les démonstrations sont à peine esquissées, et consistent presque toutes dans la considération d'un birapport, défini d'une façon convenable à partir de quatre points variables dont deux ou plus tendent à se confondre: la valeur limite dudit birapport (si elle est finie) ou sa valeur principale (si elle est infinitésime) fournit alors précisément un invariant projectif. Ainsi, p. ex., un élément curviligne du deuxième ordre, E_2 , et deux droites a, b sortant de son centre, O , et situées dans son plan, admettent toujours un invariant projectif infinitésime, ω ; celui-ci peut être aisément introduit avec le procédé susdit, et admet la signification métrique fournie par la formule

$$\omega = \frac{\sin(\alpha - \beta) \, ds}{2 \sin \alpha \sin \beta \, r},$$

ou α et β sont les angles formés par a et b avec la droite tangente en O à E_2 , r est le rayon de courbure de E_2 en O et ds est l'élément d'arc de E_2 . D'autres invariants projectifs sont obtenus en relation à deux éléments curvilignes, appartenant ou non à un même plan, en distinguant plusieurs cas suivant les ordres et la situation mutuelle des éléments envisagés, et en donnant en même temps leur signification géométrique. — La méthode de recherche indiquée tantôt a déjà été employée par l'A. dans des travaux antérieurs, quoique d'une façon moins systématique; sur l'argument, mais dans une direction un peu différente, cfr. aussi une Note récente du réf. [B. Segre, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 392 (1935); ce Zbl. 13, 128].

Beniamino Segre (Bologna).

Inzinger, Rudolf: Zur Geometrie der Torsen und Torsenscharen. Anz. Akad. Wiss., Wien 1935, 87—91 (Nr. 11).

Inzinger, Rudolf: Zur Geometrie der Torsen und Torsenscharen. Mh. Math. Phys. 42, 243—274 (1935).

Ein systematischer Beitrag zum Dualitätsprinzip in der Differentialgeometrie. Dual zur Geometrie der Kurven auf einer Fläche Φ werden die Φ umschriebenen Torsen eingehend untersucht, und zwar im Sinne der ebenen konformen Geometrie. Es wird eine Abbildung \mathfrak{A} der Berührungsebenen τ von Φ auf die Punkte T_1^0 einer Bildebene σ verwendet, die durch Erweiterung der Gaußschen sphärischen Abbildung gewonnen wird. Analytisch ist \mathfrak{A} dadurch bestimmt, daß eine der Bonnetschen Ebenenkoordinaten von τ die komplexe Koordinate von T_1^0 in σ ist. Neu eingeführte Elementarbegriffe sind der Berührungswinkel zweier Torsen und das sog. Torsenschmiegelement. Jeder Torse auf Φ entspricht in σ eine Bildkurve, und \mathfrak{A} hat die Eigenschaft, daß der Berührungswinkel zweier Torsen gleich ist dem Schnittwinkel ihrer Bildkurven. Weitere einfache Beziehungen bestehen zwischen den Torsenschmiegelementen und den gewöhnlichen Schmiegelementen in σ . Besonders werden Torsen längs Isophoten auf Φ auf die Kreise in σ abgebildet. Weiter werden „plankonforme“ Transformationen der Torsen betrachtet, die in σ den gewöhnlichen konformen Transformationen entsprechen. Die Moebiusche Kreisgeometrie führt so zu einer Geometrie der Torsen konstanter Krümmung mit neuen Sätzen. Zu den Isogonalkurvenkongruenzen in σ gehören die sog. Isogonaltorsenkongruenzen einer einparametrischen Torsenschar. Die Sätze von Cesàro und Scheffers finden ihr räumliches Gegenstück, und es ergeben sich viele neue Sätze, die — wie die meisten dieser Arbeit — analytisch bestätigt werden. So z. B. liegen die Gratzpunkte der Torsen aus einer Isogonaltorsenkongruenz, die sich in einer Ebene berühren, auf einer ebenen Kurve 3. Ogd. Weiter wird der

Ausartungsfall behandelt, wo die betrachteten Torsen aus Berührungsebenen einer Raumkurve c bestehen. Die Abbildung \mathfrak{A} und alle Sätze übertragen sich auf diesen Sonderfall. Neu eingeführt wird die Indikatrix einer Raumkurve in einer Berührungsebene, die aus einem Punktepaar besteht, als duales Gegenstück zur gewöhnlichen Indikatrix in einem Punkte einer Torse. Legt man durch einen Punkt einer allg. Fläche Φ alle möglichen Kurven, so erfüllen ihre so definierten Indikatrizen einen Kegelschnitt, die gewöhnliche Indikatrix von Φ . Die Theorie der Isogonaltorsenkongruenzen findet auch für den Sonderfall ihre Anwendung, insbesondere wird dadurch die Theorie der Kanalfächen erweitert. Schließlich wird \mathfrak{A} auf die Ebenen eines Bündels angewendet, womit man zu einer Theorie aller Kegel mit gemeinsamen Scheitel kommt. Die zu vermutenden Sätze werden bestätigt, und es ergibt sich nebenbei, daß die ebenen Sätze von Cesàro und Scheffers auch bei elliptischer Metrik gelten. Der Inhalt der Arbeit kann hier nur in großen Zügen wiedergegeben werden, wobei zu bemerken ist, daß überall auch für die konstruktive Behandlung die Grundlagen geboten werden.

Eckhart (Wien).

Matsumura, Isao: On the envelope of a family of surfaces. Mem. Ryojun Coll. Engrg 8, 161—166 (1936).

Aus dem Rang der Funktionalmatrix von (*) $x_k = x_k(u_1, \dots, u_n)$, $k = 1, 2, 3$, wird geschlossen, wie viele Einhüllende der aus (*) durch Festhaltung von Parametern zu gewinnenden einparametrischen Flächenscharen zusammenfallen.

W. Feller.

Myller, A.: La courbure de Bacaloglo. Ann. Sci. Univ. Jassy 24, 1—6 (1936).

Bacaloglo hat [Z. Math. Phys. 4, 312—314 (1859)] eine Definition der Flächenkrümmung analog der Gaußschen mit Hilfe sphärischer Abbildung einzuführen versucht, die darauf hinausläuft, daß die Abbildung nicht durch die Flächennormalen, sondern durch die (Haupt-) Normalen der Normalschnitte vermittelt wird. Der Wert dieser Krümmung hängt von der Art des Grenzüberganges ab und berechnet sich bei geeigneter Beschränkung desselben aus den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 durch $\frac{3}{8} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right)$. Hierfür wird ein Beweis angegeben.

W. Fenchel.

Andruetto, Giacinta: Nuova espressione per la curvatura totale di una superficie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 95—98 (1936).

Man betrachte die von einem Flächenpunkt O ausgehenden Geodätischen. v sei der Winkel, den eine beliebige, g_v , mit einer festen, g_0 , dieser Geodätischen einschließt. Dann gilt für die Gaußsche Krümmung in O

$$K = -\frac{3}{4} \left(\frac{d}{dv} \frac{1}{\varrho_v} \right)^2 + \frac{1}{\varrho_v^2} + \frac{d}{dv} \frac{1}{\varrho_v \tau_v}$$

identisch in v . Hierbei ist $1/\varrho_v$ die Krümmung und $1/\tau_v$ die Windung von g_v in O . Der Beweis beruht auf Taylor-Entwicklungen nach dem geodätischen Abstand von O . Ref. bemerkt, daß sich auch $1/\tau_v$ durch $1/\varrho_v$ ausdrücken läßt. Beachtet man nämlich, daß $1/\varrho_v$ gleich der Krümmung des zugehörigen Normalschnittes ist, so findet man mit Hilfe der Eulerschen Formel für die Krümmungen der Normalschnitte und einer Formel von Bianchi für die Windung einer Geodätischen (Lezioni di geometria differenziale Bd. 1, S. 296, 3. Aufl. 1922) die Beziehung $\frac{1}{\tau_v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dv} \frac{1}{\varrho_v}$. Hiernach erscheint die obige Formel als Folge des erwähnten Eulerschen Satzes.

W. Fenchel.

Andruetto, Giacinta: Sulle linee ed ipersuperficie geodeticamente parallele. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 99—103 (1936).

Einfacher Beweis dafür, daß die Kurven, die auf den geodätischen Normalen einer beliebigen Flächenkurve konstante Längen abschneiden, orthogonale Trajektorien der Geodätischen sind, sowie für das n -dimensionale Analogon hiervon. In ähnlicher Weise geht übrigens z. B. Darboux vor (vgl. Théorie générale des surfaces Bd. 2, S. 426 ff., 2. Aufl. 1915).

W. Fenchel (Kopenhagen).

Myers, Sumner Byron: *Connections between differential geometry and topology*. II. Closed surfaces. Duke math. J. 2, 95—102 (1936).

Fortsetzung der dies. Zbl. 12, 275 referierten Untersuchungen. Die Resultate sind größtenteils schon früher angekündigt worden (vgl. dies. Zbl. 11, 226). Wegen der Terminologie vgl. diese Referate. Verf. betrachtet geschlossene differentialgeometrische Flächen, die entweder analytisch oder von der Klasse 5 im Sinne von Veblen und Whitehead (*Foundations of differential geometry*, Cambridge 1932) sind. Der zu einem beliebigen Flächenpunkt A gehörige Ort m der Minimumpunkte ist eine stetige Kurve, deren eindimensionale Bettische Zahl gleich der eindimensionalen Bettischen Zahl mod 2 der Fläche ist. Entfernt man m aus der Fläche, so bleibt ein Elementarflächenstück, in dem die geodätischen Polarkoordinaten mit dem Pol A überall regulär sind. Im analytischen Fall läßt sich weiter zeigen, daß m ein linearer Graph ist, dessen Strecken analytische Kurvenbögen sind. Seine Endpunkte sind konjugiert bezüglich A , und zwar auf A zugewandte Spitzen des Ortes der ersten konjugierten Punkte von A . Die Ordnung eines Eckpunktes des Graphen ist gleich der Anzahl Male, die er als Minimumpunkt bez. A erscheint. Bezeichnet θ den Polarwinkel von A aus, so wird, wenn θ von 0 bis 2π variiert, jede Strecke des Graphen genau zweimal durchlaufen, und zwar stets in entgegengesetzten Richtungen, wenn die Fläche orientierbar ist, aber wenigstens eine Strecke beidemal im selben Sinne, wenn die Fläche nichtorientierbar ist. Ein Teil dieser Sätze kann in abgeschwächter Form auch im nichtanalytischen Fall bewiesen werden. W. Fenchel (Kopenhagen).

Caccioppoli, R.: *Rappresentazione conforme e superficie quadrabili*. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 379—384 (1935).

The paper is concerned with generalized conformal maps of continuous surfaces, and is closely related, both in methods and in results, to the recent work of McShane [Parametrizations of saddle surfaces, with application to the problem of Plateau, Trans. Amer. Math. Soc. 35, 716—733 (1933); this Zbl. 7, 119] and of Morrey [An analytic characterization of surfaces of finite Lebesgue area, part I. Amer. J. Math. 57, 692—702 (1935); this Zbl. 12, 204]. The author uses certain results of one of his earlier papers [Transformazioni piane, superficie quadrabili, integrali di superficie, Rendiconti del Circ. Mat. Palermo 54, 1—46 (1930)], whose details the reviewer was unable to completely understand. Tibor Radó (Columbus, Ohio).

Takasu, Tsurusaburo: *Differentialkugelgeometrie*. XVI: Über die L -Minimalflächen. III. Tl. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 643—664 (1936).

Untersuchungen über L -Minimalflächen und Sätze über solche. Im einzelnen werden folgende Gegenstände behandelt: L -isotherme Systeme, eine L -Verallgemeinerung eines Weierstrassschen Satzes über die Kennzeichnung der Minimalflächen, L -Verallgemeinerung unter Ausbau eines Satzes von Carleman über Kennzeichnung der Minimalflächen, Zusammenhang zwischen L -Umfang und L -Oberfläche eines Minimalflächenstückes, Kennzeichnung der L -Kugelkongruenzen als Mittenkugelkongruenzen, zwei kennzeichnende Eigenschaften der Ribaucourschen Mittenkugelkongruenzen, Untersuchungen über isotherm-konjugierte Systeme (Bezeichnung nach L. Bianchi) und über L -Verbiegung von L -Minimalflächen und die dadurch entstehenden adjungierten L -Minimalflächen. (XV. vgl. dies. Zbl. 12, 313.) H. Schatz.

Backes, F.: *Sur une propriété caractéristique des congruences W*. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 185—194 (1936).

Soit (P) , (P') deux surfaces dont les réseaux conjugués (u, v) se coupent inversement: les tangentes P_u, P'_v concourent au point Q , celles de P_u, P'_u — au point Q' . Si de plus les plans qui contiennent ces tangentes $PP'Q, PP'Q'$ osculent les courbes u, v aux points P, P' , la droite PP' engendre une congruence W dont u, v sont les paramètres des asymptotiques des nappes focales. Inversement, quelle que soit une congruence W , chaque rayon porte ∞^1 couples de points P, P' harmoniquement conjugués par rapport aux foyers et qui possèdent la propriété nommée. Les points Q

qui leur correspondent sont situés sur une cubique gauche qui touche les nappes focales de (PP') . Si les développables des congruences QQ' ainsi obtenues se correspondent, elles correspondent aux développables de la congruence (PP') . *S. Finikoff.*

Long, Louis: Sur un réseau plan. IV. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 195—208 (1936).

Soit (B) une surface rapportée à ses lignes de courbure $u, v, \sqrt{2\rho}$ — la distance du point générique B de l'origine, λ, θ et ω — les distances de l'origine au plan tangent de (B) et aux plans principaux. Cela posé, λ et ρ vérifient l'équation $x_{uv} = \frac{\theta_v}{\theta} x_u + \frac{\omega_u}{\omega} x_v$ avec la relation $2\rho = \theta^2 + \omega^2 + \lambda^2$ et déterminent un réseau plan. Diverses surfaces (B) sont caractérisées par les propriétés du réseau (λ, ρ) . Par exemple, la courbure totale de (B) est -1 si (λ, ρ) est orthogonal. Applications à la transformation par polaires réciproques des congruences normales et à la définition des surfaces de Weingarten. (III. voir ce Zbl. 13, 225.) *S. Finikoff (Moscou).*

Bachvalov, S.: Sur un couple de congruences. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 211—214 (1936).

La première congruence du couple L, L_1 est engendrée par une droite qui joint les points homologues A_0, A_3 de deux surfaces dont les asymptotiques se correspondent, la seconde — par la droite d'intersection de leurs plans tangents. L est arbitraire, L_1 est déterminée avec 4 fonctions arbitraires d'un argument. Les foyers A_1, A_2 de L_1 sont situés dans les plans focaux de L . Les foyers homologues des congruences $(A_0 A_3), (A_0 A_1), (A_3 A_1)$ ainsi que de $(A_0 A_3), (A_0 A_2), (A_3 A_2)$ sont alignés.

S. Finikoff (Moscou).

Topologie:

Scorza Dragoni, G.: Qualche teorema sulle curve di Jordan. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 181—186 (1936).

Scorza Dragoni, Giuseppe: Sulle linee di Jordan. Boll. Un. Mat. Ital. 15, 5—8 (1936).

In der ersten Note wird gezeigt: Sind j_1, \dots, j_n geschlossene Jordankurven der Ebene und ist J_p die Vereinigungsmenge des Innern von j_p und j_p selbst, ist ferner (für alle $i, k = 1, \dots, n$) $J_i J_n \neq 0$, so existiert genau eine geschlossene Jordankurve j_0 derart, daß jeder Punkt von j_0 wenigstens einem j_i angehört und jeder Punkt von J_i ($i = 1, \dots, n$) entweder zu j_0 gehört oder durch j_0 vom Unendlichen getrennt wird. Der Satz der zweiten Note folgt hieraus durch Inversion. *H. Busemann.*

Steiger, Franz: Eine Herleitung der 17 Kongruenzgruppen der Euklidischen Ebene mit topologischen Methoden. Comment. math. helv. 8, 235—249 (1936).

G. Pólya hat (Z. Kristallogr. 60, 278ff.) die Existenz von genau 17 Kongruenzgruppen \mathfrak{K} der euklidischen Ebene mit endlichem Fundamentaltbereich nachgewiesen. Alle enthalten als abelschen Normalteiler eine aus Translationen bestehende Gruppe \mathfrak{T} mit zwei unabhängigen erzeugenden Translationen. Die Ebene modulo \mathfrak{T} ist ein Torus F , und die Faktorgruppe $\mathfrak{F} = \mathfrak{K}/\mathfrak{T}$ entspricht einer Gruppe von periodischen Abbildungen von F , die keine indikatrizierhaltenden fixpunktfreien Abbildungen enthält und die F als reguläre Überlagerungsfläche über einer Modulfläche Φ darstellt. Die Aufzählung der möglichen 17 Fälle ergibt sich nun mittels der topologischen Hilfsmittel (insbesondere der Formel von Hurwitz), die der Verf. in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 12, 228) benutzt hat. Die einzelnen Fälle werden dann durch Angabe der Gruppe und Beschreibung eines „Modells“ durchgenommen. *Jakob Nielsen.*

Polak, A.: Offene Abbildungen und stetige Zerlegungen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 155—157 (1936).

Eine stetige Abbildung f eines Kompaktums X auf ein Kompaktum Y heißt offen, wenn sie jede offene Menge von X auf eine offene Menge von Y abbildet. Sie ist dadurch charakterisiert, daß die zugehörige stetige Zerlegung von X (in die Urbildmengen der Punkte von Y) vollstetig ist, d. h. für jede konvergente Punktfolge

$y_1, y_2, \dots \rightarrow y$ die zugehörigen Urbildmengen X_1, X_2, \dots gegen das Urbild von y konvergieren. (Zuerst von Eilenberg bewiesen, Fundam. Math. **24**, 160—176; dies. Zbl. **10**, 277.) Eine offene Abbildung f von X auf Y ist auch dadurch charakterisiert, daß die Menge der Elemente der zu f gehörigen Zerlegung von X eine abgeschlossene Teilmenge im Raum aller abgeschlossenen Teilmengen von X ist; übrigens ist diese Menge zu Y homöomorph. Haben bei der offenen Abbildung f keine zwei Urbildmengen von Punkten aus Y denselben Durchmesser, so ist Y einer Punktmenge der Zahlengeraden homöomorph; ist Y n -dimensional, so enthält Y eine mindestens $(n-1)$ -dimensionale Menge von Punkten, deren Urbilder in X alle denselben Durchmesser haben. Ist die Abbildung f des Kontinuums X auf das Kontinuum Y offen und die Zahl c weder das Maximum noch das Minimum der Durchmesser der Urbildmengen von Punkten aus Y , so zerlegt die Summe aller Urbildmengen in X mit dem Durchmesser c das Kontinuum X .
Nöbeling (Erlangen).

Mazurkiewicz, Stefan: Über erreichbare Punkte. Fundam. Math. **26**, 150—155 (1936).

Erstens wird bewiesen, daß die Menge der [im Sinne des Ref., Ann. of Math. **36**, 15 (1935)] s -erreichbaren Punkte eines Kompaktums $F \subset R^n$ bei jedem s eine $G_{\delta\sigma\delta}$ -Menge ist. Insbesondere wird dadurch die Struktur der Menge der regulär-erreichbaren Punkte geklärt [ein Punkt $a \subset F \subset R^n$ heißt regulär-erreichbar (Whyburn), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\sigma > 0$ gibt derart, daß jeder Punkt $p \subset R^n - F$, $\rho(a, p) < \sigma$, mit a durch einen bis auf den Endpunkt a ganz in $R^n - F$ verlaufenden Jordan-Bogen von einem Durchmesser $< \varepsilon$ verbunden werden kann]. Zweitens wird gezeigt, daß die Menge der schlechthin erreichbaren Punkte eines ebenen Kompaktums eine Borelsche Menge ist. Dadurch wird eine in der Theorie der Erreichbarkeit seit langem bestandene Lücke ausgefüllt: Urysohn und Nikodym zeigten, daß die Menge der (schlechtweg) erreichbaren Punkte von $F \subset R^n$ eine A -Menge ist; wobei, falls $n \geq 3$ ist, sie unter Umständen eine nicht-Borelsche A -Menge sein kann. Das ebene Problem blieb bis zu der vorliegenden Arbeit ungelöst (vgl. dies. Zbl. **11**, 39 [Alexandroff]).
P. Alexandroff (Moskau).

Čech, Eduard: On general manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **22**, 110 bis 111 (1936).

Neue Definition von verallgemeinerten geschlossenen Mannigfaltigkeiten. — Eine M^n ist nach dieser Definition ein n -dimensionaler bikompakter Raum F , Träger eines nichtberandenden n -dimensionalen Zyklus des gegebenen Koeffizientenbereiches J , lokal zusammenhängend in den Dimensionen $\leq n-1$. Ferner wird vorausgesetzt, daß in jeder echten abgeschlossenen Teilmenge $\Phi \subset F$ alle n -dimensionalen Zyklen beranden und daß es zu jedem Punkt $p \subset F$ und jeder Umgebung $U(p)$ eine solche Umgebung $V(p)$ gibt, daß jeder n -dimensionale Zyklus mod $(F - U)$ einem absoluten Zyklus („absolut“ als Gegensatz zu „relativ“) homolog ist mod $F - V$. Wird lokaler Zusammenhang nur in den Dimensionen von p bis $n-1$ (inkl.) verlangt, so spricht Verf. von Mannigfaltigkeiten vom Range p . Der Definition liegt, wie aus dem Obigen folgt, ein fester Koeffizientenbereich zugrunde. Verf. spricht für diesen Mannigfaltigkeitsbegriff den Poincaréschen Dualitätssatz im Sinne der Pontrjaginschen Charakterentheorie aus.
P. Alexandroff (Moskau).

Mechanik.

Campbell, J. W.: On the principles of Hamilton and Cartan. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 82—86 (1936).

Vereinfachte Darstellung bekannter Tatsachen über die formale Kennzeichnung holonom oder nichtholonom Systeme mittels Integrainvarianten und sonstiger Kurvenintegrale.
Wintner (Baltimore).

Dungen, F.-H. van den: Sur les petits mouvements d'un système soumis à des forces gyroscopiques. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1014—1015 (1936).

Schwerdtfeger, Hans: Über schwerpunkterhaltende Bewegungen materieller Systeme. Acta Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncaei 88, 302—307 (1935).

In einer früheren Note (dies. Zbl. 12, 37) hat Levi-Civita die Bedingungen formuliert, unter denen bei der Bewegung eines kontinuierlichen Systems die Bewegung des Schwerpunkts stets mit der eines bestimmten materiellen Punktes zusammenfällt, und gezeigt, daß dies der Fall ist, wenn die Geschwindigkeitskoordinaten lineare Funktionen (mit zeitabhängigen Koeffizienten) der Ortskoordinaten sind. In der vorliegenden Note sollen Verallgemeinerungen dieses Satzes gesucht werden. — Der Autor betrachtet statt des obenerwähnten linearen Differentialgleichungssystems ein allgemeineres, z. B. im Fall nur einer Ortskoordinate: $dx/dt = \chi(x, t)$, und behauptet, daß die Bedingung erfüllt sei, wenn nur χ eine „schlichte“ Funktion bedeutet, d. h. wenn die Umkehrung $x(\chi)$ eindeutig ist. F. Noether (Tomske).

Moiseiev, N.: Über die Relativkrümmung der zwei benachbarten dynamischen Trajektorien. (Zur Frage über die Stabilität nach Jacobi.) Russ. astron. J. 13, 78 bis 82 (1936).

The dynamical system under consideration is given by $\ddot{x} = 2n\dot{y} + U_x$, $\ddot{y} = -2n\dot{x} + U_y$, $U = U(x, y)$, $n = \text{const.}$ A trajectory, T , is determined by specifying a point P of T , an angular coordinate φ at P , and a value of the energy constant h . Denoting by s the arc length along T and by δn the normal distance to a nearby trajectory, the relative curvature of the varied trajectory is defined as $d^2 \delta n / ds^2$. This paper is chiefly devoted to an elementary computation of the coefficients of the linear terms in the expansion of $d^2 \delta n / ds^2$, the linear terms being those in δn , $\delta \varphi$ and δh . The author also calls attention to the fact that the expression “stability in the sense of Jacobi” (neighboring trajectories are convex with respect to the given trajectory) has a meaning only under restricted conditions, e.g., if $\delta \varphi = 0$ and $\delta h = 0$. G. A. Hedlund (Bryn Mawr).

Maeda, Fumitomo: Transitivity of conservative mechanism. J. Sci. Hiroshima Univ. A 6, 1—18 (1936).

Verf. betrachtet einen Raum Ω und ein darin definiertes, endliches und absolut additives Maß β . Ferner betrachtet er die bezüglich β absolut additiven Mengenfunktionen mit endlichem „Quadratintegral“. Diese Funktionen bilden einen Raum $L_2(\beta)$, der außer der Separabilität alle Eigenschaften des Hilbertschen Raumes besitzt. Auf diese Funktionen wird die Ergoden- und Mischungstheorie übertragen. *Hopf*.

Scorza Dragoni, Giuseppe: Transittività metrica e teoremi di media. Rend. Circ. mat. Palermo 59, 235—255 (1935).

Weiterführung früherer Arbeiten des Verf. (vgl. dies. Zbl. 11, 135, 373; 12, 422) unter Annahme metrischer Transitivität. Wintner (Baltimore).

Bilimovitch, A., und B. Petronievics: Beitrag zur elementaren Lösung der zwei speziellen Fälle des Dreikörperproblems. Astron. Nachr. 258, 209—218 (1936).

Die Verff. stellen die wohlbekannten elementaren Eigenschaften der homothetischen Lösungen von Euler und Lagrange im Zusammenhang dar. Der Hauptsatz der Lagrangeschen Theorie, nämlich daß alle diese Lösungen ebene Lösungen sind (vgl. C. Carathéodory, dies. Zbl. 8, 134), wird nicht bewiesen. Wintner.

Wintner, Aurel: Sur les solutions périodiques et asymptotiques du problème restreint des trois corps. Bull. Astron., II. s. 9, 251—253 (1934).

Replies are made to some criticisms of K. Popoff (Bull. Astron. 9, fasc. 3, 177 et seq.) on the author's previous well known work on the Strömgen groups of periodic motions. D. C. Lewis (Ithaca, N. Y., U. S. A.).

Popoff, Kyrille: Sur les solutions périodiques et asymptotiques du problème restreint des trois corps. Bull. Astron., II. s. 9, 177—226 (1934).

Der Verf. versucht, die Theorie der kritischen Punkte analytischer Differentialgleichungen $dx_i/X_i = dt$; $i = 1, 2, \dots, n$ auf verschiedene Lösungen des Dreikörperproblems anzuwenden und von Poincarés Theorie der periodischen und asymptotischen

Lösungen gewisse Anwendungen zu machen. Dabei wird auf schwierige Einzelfragen nicht eingegangen. Bezüglich der einführenden Betrachtungen des Verf. vgl. eine Note des Ref. in Bull. Astron., II. s. 9, 251—253 (1936); vgl. vorsteh. Ref. *Wintner*.

Moissejev, N.: Über einige anepicyklische Gebiete im eingeschränkten Dreikörperproblem. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 63—66 (1936).

Using the Birkhoff phase coordinates (x, y, φ) for motions having an assigned Jacobian constant h , it is found that a member of the family of surfaces, $\sqrt{2}(\overline{U + h})(x \sin \varphi - y \cos \varphi) + n(x^2 + y^2) = \text{a constant}$, can be tangent to a trajectory only at a point where $y = 0$ or $x = x_2(M - m)/(2M)$. These equations give the boundaries of the "anepicyclie" regions mentioned in the title. *D. C. Lewis*.

Moissejev, N.: Über ein vereinfachtes Schema des Planetensystems. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 67—68 (1936).

A particle of negligible mass is envisaged as moving in a gravitational field due to two particles of finite masses, moving in circles about their center of gravity 0, and a finite number of uniform circular linear mass distributions with centers at 0 and coplanar with the two finite particles. A theorem of Gauss is invoked to show the practical application to astronomy. *D. C. Lewis* (Ithaca, N. Y., U. S. A.).

Boneff, N.: Sur l'excentricité et la constitution de l'anneau de Saturne. Astron. Nachr. 258, 293—302 (1936).

On the assumption (shown to be reasonable) that the rings of Saturn are made up of a relatively small number of satellites with small nuclei surrounded by large but relatively light dust clouds, it is shown how the mutual perturbations of these satellites may produce periodic variations in the excentricity of the ring. *D. C. Lewis*.

Crudeli, Umberto: Sulla ricerca di figure d'equilibrio dei fluidi rotanti. Mem. Soc. astron. Ital., N. s. 9, 113—116 (1936).

Assuming the rotating space and the angular velocity to be preassigned, a system of functional equations is obtained for the determination of the density. Rigorous existence theorems are, however, not given. *D. C. Lewis* (Ithaca, N. Y.).

Astronomie und Astrophysik.

Milne, E. A.: The pressure in the interior of a star. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 96, 179—184 (1936).

The theorem is stated that: In any configuration in gravitational equilibrium in which $\bar{\rho}(r)$, the mean density inside radius r , always exceeds $\rho(r)$, the actual density at r , the function $P + 3G[M(r)]^2/8\pi r^4$ decreases outwards. Here P is the total pressure at r , $M(r)$ the mass inside r , G the constant of gravitation. This is a generalisation of a theorem due to Eddington, and it is proved by a new method. It is applied to an integral theorem on stellar equilibrium previously given by the author [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 89, 739 (1929)], the results being expressed in forms suitable for use in the theory of the following series of papers.

W. H. McCrea (London).

Milne, E. A.: Polytopic equilibrium. I. The radii of configurations under given external pressure. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 96, 184—195 (1936).

The usual problem of polytopic equilibrium is to calculate the radius r_1 , etc., of a given mass M in equilibrium under its own gravitation, when the total pressure P at any point r is related to the density ρ at that point by the polytopic relation $P = K\rho^{1+1/n}$, the boundary condition being $P = 0$ at $r = r_1$. The author now considers the boundary condition $P = P_1$ at $r = r_1$, where P_1 is a given external pressure, and seeks to find r_1 as a function of P_1 . Three cases arise: ($n < 3$) r_1 decreases monotonically, from its ordinary value for $P_1 = 0$, with increasing P_1 ; ($n = 3$) $r_1 P_1^{1/4} = \text{constant}$ for given $M < M_0$, where M_0 is the mass of the corresponding complete polytrope, there being no possible solution for $M > M_0$; ($n > 3$) starting

from its ordinary value for $P_1 = 0$, r_1 first increases with increasing P_1 up to a value $(P_1)_{\max}$, there are no solutions for $P_1 > (P_1)_{\max}$, but at this value the curve bends round and possesses another branch along which r_1 increases with decreasing P_1 , and $r_1 \rightarrow \infty$ as $P_1 \rightarrow 0$. Thus for $n > 3$, r_1 is a 2-valued function of P_1 for all P_1 in $0 < P_1 < (P_1)_{\max}$. In all cases K is supposed to remain constant. The object of the work is to study the photospheric radius of stars, by putting P_1 equal to the photospheric pressure, and thus to circumvent the usual difficulties of justifying the use of complete polytropes to represent actual stars, where in fact polytropic equilibrium cannot hold right up to the outer boundary. The results stated cannot be applied directly to actual stars, since K , P_1 are not given a priori, but depend themselves on the structure of the star. However they indicate where theories of certain phenomena are to be sought: the limiting mass of stars may be connected with the parameter M_0 , the existence of giants and dwarfs to the 2-valuedness of r_1 for $n > 3$, the nova phenomenon may be connected with a transition from one of these values to the other. These and other possible cosmogonic applications are discussed.

W. H. McCrea (London).

Milne, E. A.: Polytropic equilibrium. II. The pressure in the photosphere of a star. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **96**, 195—206 (1936).

The parameter P_1 of paper I. (see the preceding rev.) is now taken to apply to the photosphere of a star, i.e. to optical depth $\tau = 2/3$, where the temperature $T_1 = T_e$, the effective temperature, according to the standard theory of stellar atmospheres, and the gas pressure is, say, p_1 . Then, assuming the general character of the star below the photosphere to be represented by a polytropic configuration of index u , in particular that its "compressibility" as a whole can be represented in this way, these photospheric parameters may be substituted in the formulae of paper I. The two fundamental formulae then proved are

$$p_1 = \frac{(R/\mu)^4 T_1^4}{4\pi G^3 M^2 \beta_1} (n+1)^3 \theta_1^{n-3} \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_1^2, \quad (1)$$

$$r_1 = \frac{\beta_1 G M}{(R/\mu) T_1} \frac{1}{n+1} \frac{\theta_1}{\left(-\xi \frac{d\theta}{d\xi} \right)_1}, \quad (2)$$

where the symbols are the usual ones appearing in the theory of stellar structure, θ , ξ the parameters occurring in the standard form of Emden's equation, and the suffix 1 denoting values at the level where $P = P_1$, now taken to be the photosphere. (1), (2) express the physical fact that the photospheric pressure holds the underlying material down to the observed photospheric radius r_1 . They permit a calculation of the photospheric pressure without appeal to a knowledge of the photospheric absorption coefficient. It is shown that the resulting values agree with estimates based on opacity determination for the sun, and also values of the right order of magnitude for the stars in general. Other related matters are discussed, including the photospheric value of radiation pressure. It is shown that the "mean polytropic index" n of a star may be estimated from observational data, and that the sun must have $n = 3$, very nearly, in agreement with Eddington's work.

W. H. McCrea (London).

Milne, E. A.: Polytropic equilibrium. III. The luminosity of a star. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **96**, 207—218 (1936).

The results (1), (2) of the preceding abstract are here made the basis for deriving a kind of mass-luminosity law. This is shown to take the approximate forms (for example) ($n = 3$), $L \propto M^3 / \bar{\kappa}_1$; ($n = 3.5$), $\bar{\kappa}_1^{4/5} L \propto M^{14/5} T_1^{2/5}$; ($n = 4$), $\bar{\kappa}_1^{2/3} L \propto M^{8/3} T_1^{2/3}$. Here $\bar{\kappa}_1$ is the mean opacity of the layers outside that for which $P = P_1$. The significance of such results is discussed, in particular with reference to the part played by $\bar{\kappa}_1$. The paper concludes with a careful review by the author of his researches on stellar structure, and the relation of his method of approach to that of other writers. The

fresh approach made in the present series of papers confirms in a general way the position which he adopted in commencing the work in 1929. *W. H. McCrea* (London).

Ten Bruggencate, P.: Über das Eintreten von Elektronenentartung im Sterninnern. *Z. Astrophys.* **11**, 201—220 (1936).

Verf. diskutiert unter Benutzung der Rosselsandschen Transformation auf dimensionslose Variable den inneren Aufbau eines Sterns nach dem Standardmodell. Die Gleichungen erhalten durch die Benutzung der erwähnten Transformation eine einfache Form. Die Bedingungen für das Eintreten von Entartung bzw. relativistischer Entartung werden ebenfalls unter Benutzung der Rosselsandschen Transformation abgeleitet. Für die singularitätsfreien Lösungen wird das von Chandrasekhar erhaltene Resultat wiedergefunden. — Die Entartungsbedingungen für Singularitätslösungen werden diskutiert. Zum Schluß wird das durch die Untersuchungen Chandrasekhars angeregte Problem der Entwicklung von Sternen sehr großer Masse, für die nie im Innern Entartung auftreten kann (wenn die gewöhnlich benutzte Zustandsgleichung bei relativistischer Entartung richtig ist, was Eddington bezweifelt hat), erörtert.

Bengt Strömberg (Kopenhagen).

Gratton, L.: La teoria delle atmosfere stellari ed il problema delle parallassi spettroscopiche. *Rend. Semin. mat. fis. Milano* **8**, 1—29 u. 247 (1934).

Verf. gibt eine eingehende Übersicht über die modernen Probleme der Sternatmosphären und über die Theorie der Konturen von Spektrallinien. Es wird eine Theorie der Intensität der Spektrallinien entwickelt und ihre praktische Brauchbarkeit an verschiedenen einfachen Beispielen erläutert.

Slouka (Prag).

● **Handbuch der Astrophysik.** Hrsg. v. G. Eberhard; A. Kohlshütter und H. Ludendorff. Bd. 7. Erg.-Bd. Berücksichtigend die Literatur bis Ende 1934 nebst einem Generalregister des Gesamtwerkes. Berlin: Julius Springer 1936. IX, 755 S. u. 110 Abb. RM. 126.—.

Strömberg, Bengt: Die Ionisation in den Atmosphären der Himmelskörper. S. 203 bis 242 u. 4 Abb.

This article is supplementary to that by A. Pannekoek on the same subject in Bd. 3, and also to the part of that by E. A. Milne in Bd. 3 which deals with stellar atmospheres. It reviews the literature published in the years 1929—1935. The subjects discussed are: The continuous spectrum. Mathematical advances in the theory are sketched. The theoretical continuous absorption coefficient for assumed atmospheric compositions, based on observed compositions, and the resulting continuous spectrum, are discussed. The theory of ionisation. The physical basis of the theory of absorption lines. An outline is given of the theory of natural line widths, and the various kinds of broadening which can occur in stellar conditions, and the effect of fluorescence coupling. The theory of absorption lines. The preceding physical theory is applied to the formation of lines in stellar spectra, and amongst other things the problem of the central intensities of the lines is discussed. Identification of spectral lines. Model stellar atmospheres. The general theory is applied to calculate the observable properties of stellar atmospheres of suitable assumed composition and temperature and subject to assumed values of surface gravity. In particular recent calculations of the variation of line strengths for various elements with effective temperature and with surface gravity are summarised. Theory of the chromosphere. Molecular bands in stellar spectra. Emission lines. Convection in stellar atmospheres. Effect of rotation on line contours. Full bibliographies are given for all these subjects.

W. H. McCrea (London).

Relativitätstheorie.

Esclangon, Ernest: Sur l'application du principe de relativité à l'étude d'un problème dynamique. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 993—995 (1936).

The author returns to the problem, considered in an earlier paper (this Zbl. **13**, 287),

of the motion in a galileian space of a material particle which is subjected to a force having constant magnitude and direction. The problem was designed to show that the restricted theory of relativity contains inherent contradictions, and the present note is devoted to obtaining more exact formulae than in the previous paper. *Ruse.*

Milne, E. A.: On the foundations of dynamics. Proc. Roy. Soc. London A 154, 22—52 (1936).

Das Bewegungsgesetz der in Milnes kinematischer Kosmologie auftauchenden — von den Fundamentalpartikeln verschiedenen — freien Zusatzpartikel (die relativ zum jeweiligen Fund.-Beobachter dennoch beschleunigt sind) wird zum Ausgangspunkt einer neuen Kraftdefinition gemacht; die Kraft mißt dann die Abweichung vom kinematischen (kosmischen) Bewegungsgesetz, das somit zum Trägheitsgesetz erhoben wird. Der Hauptinhalt der Arbeit besteht in der lorentzinvarianten Formulierung dieses Ansatzes. Die Minkowskische Dynamik ist ein Spezialfall der vorliegenden. Führt man ein die Bezeichnungen $M = m\xi^{1/2}$; $\Omega = c^2\xi^{1/2}$; $\xi = Z^2/XY$; $X = t^2 - P^2/c^2$; $Y = 1 - V^2/c^2$; $Z = t - (PV)/c^2$; $p = MV/Y^{1/2}$, wo m eine Konstante ist und P, V Orts- und Geschwindigkeitsvektor bedeuten, so lauten die vorgeschlagenen Bewegungsgleichungen

$$\frac{1}{Y^{1/2}} \frac{dp}{dt} = F_a - m \frac{\partial \Omega}{\partial P} \quad \text{mit} \quad F_a = \frac{1}{Y^{1/2}} \frac{d}{dt} \left[M \left(\frac{V}{Y^{1/2}} - P \frac{Y^{1/2}}{Z} \right) \right].$$

M fungiert als (von Geschwindigkeit und Ort abhängige) träge Masse. F_a heißt scheinbare Kraft, im Gegensatz zur wahren Kraft

$$F = F_a - m \frac{V}{Y^{1/2}} \frac{\xi - 1}{Y^{1/2}}.$$

Mit ihr kann man die Bewegungsgleichungen schreiben

$$\frac{1}{Y^{1/2}} \frac{dp}{dt} = F + Mg, \quad \text{wo} \quad g = -\frac{1}{X} \left(P - V \frac{Z}{Y} \right)$$

die kosmische Beschleunigung einer freien Partikel bedeutet. Aus der Tatsache, daß g als Gravitationseffekt der Gesamtheit des Substrats der Fundamentalpartikel aufgefaßt werden kann, wird die zweite Deutung von M als schwere Masse gewonnen. Nach einigen Betrachtungen über Arbeit und Energie wird für das verallgemeinerte Gravitationspotential Ω u. a. die in der Nähe einer Fundamentalpartikel gültige Beziehung $\Delta \Omega \cong 3/t^2$ abgeleitet, die, mit der Poissonschen Gleichung $\Delta \Omega = 4\pi\gamma\varrho_0$ verglichen, $\gamma = 3/4\pi\varrho_0 t^2$ liefert. In der ganzen Theorie hat die Zeit t ihren natürlichen Nullpunkt in dem singulären Moment des „Weltanfangs“ und kann dann aus dem Hubbleschen Ausdehnungsgesetz berechnet werden zu $t = 0,6 \cdot 10^{17}$ sec. Mit einer (sehr anfechtbaren, jedenfalls enorm unsicheren) Abschätzung $\varrho_0 = 10^{-27}$ g cm⁻³ kommt der Verf. auf $\gamma = 6,6 \cdot 10^{-8}$ cm³ sec⁻² g⁻¹ in Übereinstimmung mit irdischen Bestimmungen der Gravitationskonstante. Er hält die Übereinstimmung der Größenordnung für verbürgt. *Heckmann* (Göttingen).

Abraham, Henri: Contribution à l'étude de l'univers en expansion. Jubilé de Marcel Brillouin 49—59 (1935).

Deutung der Korrelation zwischen Linienverschiebungen in den Spektren und den Entfernungen der außergalaktischen Nebel auf Grund eines (sehr summarisch behandelten) speziellen Absorptionsprozesses an freien Elektronen. *Heckmann.*

Sulaiman, S. M.: The expanding universe. Indian Phys.-Math. J. 7, 31—34 (1936).

Narlikar, V. V.: The stability of a particle in a gravitational field. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 96, 263—266 (1936).

Es werden einige notwendige Bedingungen untersucht, bei welchen die Geodätischen der speziellen Metrik $ds^2 = g_4 dt^2 - \sum_1^3 g_i dx_i^2$ dargestellt in der Form $x_i = x_i(t)$ in beliebiger Nähe eines Punktes (x_1^0, x_2^0, x_3^0) bleiben können, der dann „stabil“ heißt. Anwendungen auf verschiedene bekannte Metriken. — Offenbar ist die Definition

vom Koordinatensystem abhängig. Die Frage, wann — evtl. erst nach Einführung geeigneter Koordinaten — eine Metrik stabile Punkte besitzt, wird nicht allgemein gestellt.

Heckmann (Göttingen).

Drumaux, P.: Sur la force gravifique. Ann. Soc. Sci. Bruxelles B 56, 5—14 (1936).

Verf. korrigiert die in der Literatur mehrfach auftauchende Meinung, daß im Gravitationsfelde des Schwarzschildschen Linienelementes abstoßende Bereiche existieren.

Heckmann (Göttingen).

Hoffmann, B.: A generalization of the Kaluza-Klein field theory. Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 20—31 (1936).

Verf. schreibt die Bewegungsgleichungen eines geladenen Massenpunktes mit einem isolierten Magnetpol (Masse m , Ladung ε , Polstärke μ) in der Form

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\} \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} - \frac{\varepsilon}{m} \varphi_b^a \frac{dx^b}{ds} - \frac{\mu}{m} \psi_b^a \frac{dx^b}{ds} = 0,$$

wo ψ_{ab} der zu φ_{ab} duale Sechservektor ist. Setzt man $\mu = 0$, so können bekanntlich diese Gleichungen auf diejenigen einer geodätischen Linie im fünfdimensionalen Raum zurückgeführt werden. Verf. zeigt nun, daß für $\mu \neq 0$ eine analoge Zurückführung mit Hilfe eines sechsdimensionalen Raumes möglich ist. Die entsprechenden Feldgleichungen können auf analoge Weise wie in der projektiven Theorie aufgebaut werden.

V. Fock (Leningrad).

Hoffmann, B.: A generalization of the Einstein-Mayer field theory. Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 32—42 (1936).

Verf. zeigt, daß die Resultate der im voranstehenden Referat besprochenen Arbeit in einer vierdimensionalen Theorie formuliert werden können, die zur sechsdimensionalen in derselben Beziehung steht wie die Theorie von Einstein und Mayer zu derjenigen von Kaluza.

V. Fock (Leningrad).

Quantentheorie.

Baudot, Marie-Antoinette: Sur les électrodynamiques nouvelles. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 919—921 (1936).

Entwicklung verschiedener Formeln betreffs der Spur des Energietensors in der Bornschen Elektrodynamik und der Wirkungsfunktionen nach Born-Infeld und Schrödinger.

P. Jordan (Rostock).

Baudot, Marie-Antoinette: Remarques sur la forme d'une fonction d'action. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1158—1159 (1936).

Die Verf. stellt den Zusammenhang her zwischen ihren kürzlich mitgeteilten Überlegungen zur Bornschen Elektrodynamik (vgl. vorstehendes Referat) und der Untersuchung von Infeld (vgl. dies. Zbl. 13, 236) über die Schrödingersche Formulierung der Bornschen Theorie.

P. Jordan (Rostock).

Born, Max: Unitary theory of field and matter. II. Classical treatment. Charged particle with electric and magnetic moment. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 3, 85—97 (1936).

In I. (vgl. dies. Zbl. 13, 236) waren die von Kramers gegebenen klassischen Bewegungsgleichungen eines Spinelektrons abgeleitet aus der Auffassung des Elektrons als einer Feldsingularität. Nun zeigt sich aber, daß nur unter spezielleren Voraussetzungen betreffs der Lagrangefunktion des Feldes folgende zwei durch einander bedingte Tatsachen sich ergeben: 1. Das ruhende Elektron hat nur ein magnetisches (kein elektrisches) Moment. 2. Das Verhältnis von magnetischem und mechanischem Spinmoment ist das vom Elektron her bekannte (doppelt so groß wie bei Larmorpräzession). — Läßt man die erwähnte Einschränkung betreffs der Lagrangefunktion des Feldes fallen, so erhält man eine gewisse Verallgemeinerung der Kramerschen Gleichungen, welche in den erwähnten beiden Punkten von diesen abweicht.

P. Jordan (Rostock).

Dantzig, D. van: Electromagnetism, independent of metrical geometry. V. Quantum-theoretical commutability-relations for light-waves. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 126—131 (1936).

In einer Reihe von Arbeiten des Verf. [Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, I. 521—525; II. 526—531; III. 643—652; IV. 825—836 (1934); vgl. dies. Zbl. 10, 187 u. 282] wurden die Maxwellschen Gleichungen in eine Form gebracht, welche unabhängig von der Metrik ist. Verf. zeigt nun, daß diese Form auch für die Darstellung der Fundamentalgleichungen der Quantenelektrodynamik geeignet ist. In den quantenmechanischen Vertauschungsrelationen treten die in II eingeführten Größen γ_{ir} und γ_{ijkv} auf (s. dies. Zbl. 10, 187). Die Form der Vertauschungsrelationen

$$[\varphi_i, \varphi_j] = \frac{\hbar c}{i} (\gamma_{ij} - \gamma_{ji}); \quad [F_{ij}, F_{kr}] = \frac{\hbar c}{i} (\gamma_{ijkv} - \gamma_{krvij})$$

weicht etwas von der gewöhnlichen ab, ist aber mit dieser in dem gewöhnlich betrachteten metrischen Fall vollständig äquivalent.

V. Fock (Leningrad).

Destouches, Jean-Louis: La nature électronique de la lumière. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 921—923 (1936).

Spekulative Bemerkungen über die Möglichkeit, das Lichtquant als aus einem Elektron und einem Positron bestehend aufzufassen; unter Berufung auf die klassische Tatsache, daß bei einer Neutralisierung der Ladungen auch die Rohmassen verschwinden würden.

P. Jordan (Rostock).

Brogie, Louis de: La variance relativiste du moment cinétique d'un corps en rotation. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 89—95 (1936).

Die mit Hilfe der Diracschen ψ -Funktionen und der Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \varrho_1$ gebildeten Bilinearformen transformieren sich bekanntlich wie die Komponenten eines Vierervektors. Andererseits korrespondieren die $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ dem eigenen Drehimpuls (spin) des Elektrons; der Drehimpuls eines Körpers wird aber gewöhnlich als der räumliche Teil eines Sechservektors angesehen. Zur Klärung des scheinbaren Widerspruches wird das Verhalten des Drehimpulses eines rotierenden Körpers gegenüber der Lorentztransformation ausführlich betrachtet.

V. Fock (Leningrad).

Jones, E. Taylor: On the mutual energy in systems of vibrating particles, and a suggestion regarding electrostatic energy. Philos. Mag., VII. s. 21, 337—355 (1936).

Verf. macht den leider ganz undurchführbaren Versuch, die elektrostatische Energie eines Systems von Elektronen als eine Art mechanische Schwingungsenergie aufzufassen, wobei die Rolle der mechanischen Schwingungen die de Broglieschen Wellen übernehmen sollen.

V. Fock (Leningrad).

Jordan, P.: Fortschritte der Theorie der Atomkerne. Naturwiss. 24, 209—216 (1936).

Bhabha, H. J.: The scattering of positrons by electrons with exchange on Dirac's theory of the positron. Proc. Roy. Soc. London A 154, 195—206 (1936).

Der Einfluß des Austausches auf die Streuung von Positronen an Elektronen wird untersucht. Weil in erster Näherung nur zwei Zustände negativer Energie (die dem Anfangs- bzw. Endzustand des Positrons entsprechen) eine Rolle spielen, treten die bekannten Schwierigkeiten der Löchertheorie in dieser Näherung nicht auf. Es zeigt sich, daß durch den Austausch die Zahl der schnellen Sekundärelektronen wesentlich vergrößert wird. Ähnliche Ergebnisse wären zu erwarten in jeder Theorie, in der Paarschöpfung und Paarvernichtung möglich sind.

Casimir (Leiden).

Yamanouchi, Takahiko: On the calculation of atomic energy levels. II. and III. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 10—22 u. 23—34 (1936).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit desselben Verf. (dies. Zbl. 12, 235) werden in dieser und der folgenden Arbeit auf gruppentheoretischer Grundlage Formeln entwickelt für die Berechnung der Energieterme eines Kernatoms mit vielen Elektronen und auf verschiedene Fälle angewandt.

O. Klein (Stockholm).

Herzfeld, Karl F., and Maria Goeppert-Mayer: On the theory of dispersion. *Physic. Rev.*, II. s. 49, 332—339 (1936).

Verff. betrachten zunächst das Rotationsspektrum eines zweiatomigen Moleküls und kommen zum Schluß, daß die beobachtete Absorption die Differenz zwischen wahrer Absorption und erzwungener Emission darstellt. Ferner wird der Einfluß der magnetischen Permeabilität μ auf den Brechungsindex n betrachtet. Für Gase gilt $n^2 - 1 = \epsilon - 1 + \mu - 1$ (ϵ dielektrische Konstante). Die Größe $n^2 - 1$ wird nach der Diracschen Dispersionstheorie berechnet. Das erste Glied im Ausdruck für $n^2 - 1$ fällt mit der gewöhnlichen Formel für $\epsilon - 1$ zusammen. [Die übrigen Glieder liefern Beiträge zu $\mu - 1$; es sind der von der Frequenz ν abhängige paramagnetische Teil, der von ν unabhängige diamagnetische Teil sowie weitere zwei Glieder, die mit ν verschwinden.]
V. Fock (Leningrad).

Bauermeister, E., und W. Weizel: Schwingungen mehratomiger Moleküle. *Physik. Z.* 37, 169—184 (1936).

Die Verff. geben einen zusammenfassenden Bericht über die Schwingungsformen mehratomiger Moleküle. Die Elektronenbewegung wird nur insofern berücksichtigt, als sie das von den Kernkoordinaten abhängige Potential mitbestimmt. Die Behandlung geschieht auf Grund elementarer Methoden ohne Gruppentheorie. Diese werden an Hand der einfachsten linearen Moleküle illustriert und der von Mecke eingeführte Begriff der Valenz- und Knickschwingungen erläutert. Der Rest des Berichtes beschäftigt sich hauptsächlich mit den Ketten- und Ringmolekülen und ihren Bewegungstypen.
R. de L. Kronig (Groningen).

Stoner, Edmund C.: The temperature dependence of free electron specific heat. *Philos. Mag.*, VII. s. 21, 145—160 (1936).

Es wird die spezifische Wärme eines quasifreien Elektronengases (Dichte der Zustände proportional der Wurzel der Energie) näherungsweise für alle Temperaturen durch Benutzung der Reihen für hohe und tiefe Temperaturen und geeignete Interpolation ausgewertet.
Nordheim (Lafayette, Indiana).

Vleck, J. H. van: Nonorthogonality and ferromagnetism. *Physic. Rev.*, II. s. 49, 232—240 (1936).

Die Wellenfunktionen in der Heitler-Londonschen Methode, von der auch Heisenberg in seiner Theorie des Ferromagnetismus Gebrauch macht, sind nicht orthogonal, und es könnte der Verdacht entstehen, daß bei Anwendung auf ein System von vielen Atomen, wie es im Ferromagnetikum ja vorliegt, die hierdurch verursachten Fehler kumulativ sind, wodurch die Richtigkeit des Endresultats in Frage gestellt würde. Auf Grund der stets zu rechtfertigenden Annahme, daß nur unmittelbar benachbarte Atome im Gitter in Wechselwirkung treten, zeigt nun Verf., daß die durch Nichtorthogonalität verursachte Ungenauigkeit einen Bruchteil $2z\delta^2:1$ bildet, wo z die Zahl der Nachbarn, δ das Wechselwirkungsintegral bedeutet. Ferner wird eine Verteilungsfunktion des Ferromagnetikums angegeben, die eine Verbesserung des mit einer Gaußschen Fehlerkurve operierenden Heisenbergschen Ansatzes darstellt.
R. de L. Kronig (Groningen).

Wasastjerna, Jarl A.: Some theoretical calculations of the physical properties of certain crystals. *Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math.* 8, Nr 21, 1—29 (1936).

Auf Grund einer früher (vgl. dies. Zbl. 6, 189) gewonnenen empirischen Formel für die potentielle Energie zweier edelgasähnlicher Ionen (die den Einfluß der „Ionenradien“ enthält) werden Eigenschaften der Gitter der Alkalihalogenide ausgerechnet.
F. Hund (Leipzig).

Fröhlich, Herbert: Über den inneren Photoeffekt an Halbleitern. *Physik. Z. Sowjetunion* 8, 501—510 (1935).

Es wird die Verteilungsfunktion von Elektronen in einem Halbleiter bei Beleuchtung mit monochromatischem Licht berechnet. In dem oberen Energieband erhält man im wesentlichen eine Maxwellverteilung, der eine praktisch temperaturunab-

hängige Funktion überlagert ist. Als Anwendung wird eine Theorie des Dember-effekts (Potentialdifferenz in einem Halbleiter zwischen verschieden stark beleuchteten Stellen) gegeben.

Nordheim (Lafayette, Indiana).

Fuchs, K.: A quantum mechanical investigation of the cohesive forces of metallic copper. *Proc. Roy. Soc. London A* **151**, 585—602 (1935).

Die Methode von Wigner und Seitz (dies. Zbl. **7**, 41) wird auf Cu angewandt. Im Gegensatz zu den Alkalien ist hier der Radius der inneren Schalen im Vergleich zum Atomabstand größer, und daher muß sowohl die Austauschwechselwirkung der Valenzelektronen mit den inneren Schalen als die elektrostatische Wechselwirkung dieser Schalen miteinander berücksichtigt werden. Die Resultate für Gitterkonstante und Kompressibilität stimmen gut mit dem Experiment überein, während die Gitterenergie eine beträchtliche Diskrepanz zeigt. Dagegen ergibt sich richtig, daß eine raumzentrierte Struktur höhere Energie hätte als die in Wirklichkeit existierende flächenzentrierte, während dieselbe Rechnung für Na für beide Strukturen ungefähr gleiche Energie ergibt.

R. Peierls (Cambridge).

Fuchs, K.: A quantum mechanical calculation of the elastic constants of monovalent metals. *Proc. Roy. Soc. London A* **153**, 622—639 (1936).

Die gleiche Methode (vgl. vorst. Ref.) wird auf die Berechnung der beiden anderen Elastizitätskonstanten von Li, Na, K und Cu angewendet. Auch hier spielt die Wechselwirkung der Ionen bei Cu eine große, bei den Alkalien eine merkliche Rolle. Die Werte für Cu sind in guter Übereinstimmung mit dem Experiment, für die Alkalien liegen keine Messungen vor, daher wurde aus den berechneten Elastizitätskonstanten die spezifische Wärme für tiefe Temperaturen berechnet, die mit der beobachteten in guter Übereinstimmung ist.

R. Peierls (Cambridge).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Cassinis, G.: Questioni di gravimetria. *Rend. Semin. mat. fis. Milano* **8**, 127 bis 167 (1934).

Gulatee, B. L.: Gravity formulae in geodesy; their precision and interpretation. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **3**, 221—235 (1936).

Herleitung und Besprechung der sogenannten Schwereformeln von Helmert, Bowie, Heiskanen u. a. m.

Hopfner (Wien).

Labocetta, L.: Determinazione delle dimensioni della terra con il metodo meccanico di Galileo per la misura delle distanze dei punti inaccessibili. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s.* **22**, 517—522 (1935).

Gutenberg, B., and C. F. Richter: On seismic waves. III. *Gerlands Beitr. Geophys.* **47**, 73—131 (1936).

II. vgl. dies. Zbl. **12**, 239.

Sakuraba, S.: A contribution to the theory of the Love waves propagating over a semi-infinite solid body of varying elasticity. *Geophys. Mag.* **9**, 211—214 (1935).

The author considers the propagation of Love waves in a semi-infinite medium whose rigidity μ increases with depth in accordance with the relation $\mu = \mu_0(1 + \sigma z)^2$. In this case the solutions involve Bessel functions of order ν , where $\nu = (1/4 - p^2/v_0^2 \sigma^2)^{1/2}$. Here p denotes the 2π frequency, and v_0 the shear wave velocity $(\mu_0/\rho)^{1/2}$. All displacements are assumed to vanish at the boundary $z = 0$. It is found that no wave may be propagated when $v_0 \sigma \geq 2p$, but that Love waves, with an infinitude of nodal planes, exist when $v_0 \sigma < 2p$.

L. B. Slichter (Cambridge, Mass.).

Honda, H., and T. Miura: On the strain produced in a semi-infinite elastic solid by statical surface force, with some applications to seismology. *Geophys. Mag.* **9**, 61—81 (1935).

Knowing the effects of the Boussinesq problem of a normal force on a semi infinite elastic medium (or of the Cerruti problem of a shearing force) one may utilize the

superposition principle and obtain the stresses and displacements due to more complicated surface loadings. The difficulty of integration attending this "potential method" has made it effective in only a small number of examples. Tereza-wa used a method of definite integrals involving Bessel's functions for any general surface normal loading which is capable of being represented by similar integrals. The present authors continue this "Bessel Function" method for normal, radial and transverse loads of the general form $F(r, \theta) = F_{n1}(r) \cos n\theta + F_{n2}(r) \sin n\theta$, with suggested extensions by means of Fourier's theorem for still more general types of surface loads. The general expressions for each of the components of displacement (U_r, U_θ, U_z) are dissected into ten separate contributory integrals depending upon the sine or cosine representation of the surface load $F(r, \theta)$. In particular the displacement integrals are evaluated for radial or transverse shearing loads of the type

$$F(r, \theta) = \frac{A_n r^{n+1} \cos n\theta}{(r^2 + b^2)^{n+3/2}}$$

and vertical loads $\sigma_z = bF$, for $n = 0, 1, 2$; $b = 10$, $\nu = 1/4$. The special case $n = 2$, for radial surface shearing loads, is shown to produce surface displacements not too dissimilar to the observed deformations of the earth's crust in some recent earthquake movements near Japan.

Holl (Ames, Iowa).

Takahasi, Kôitirô, and Kôdi Husimi: Vibrating systems exposed to irregular forces. Geophys. Mag. 9, 29—48 (1935).

Verff. gehen aus von der Gleichung für gedämpfte Schwingungen. Für die „statistische Kraft“ $f(t)$ soll gelten, daß 1. $\bar{f}_{t_1, t_1'}$ und $\bar{f}_{t_2, t_2'}$ statistisch unabhängig voneinander sind, wenn das Zeitintervall (t_1, t_1') (t_2, t_2') keine gemeinsame Teile enthält, 2. die Werteverteilung von $\bar{f} = \bar{f}(t', t'')$ für ein bestimmtes (t', t'') der Gaußschen Normalform genügt, so daß die Funktionsverteilung gegeben ist durch

$$(2\pi Q \Delta t)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{\bar{f}^2}{2Q \Delta t} \right] d\bar{f}.$$

Die Bewegungsgleichung wird unter dieser Voraussetzung abgeleitet für freie Schwingungen, für ein System mit mehreren Freiheitsgraden und für Saitenschwingungen. — An einigen Beispielen aus der Mechanik und der Meteorologie wird gezeigt, wie sich verwickelte Vorgänge als gedämpfte Schwingungen verschiedener Art darstellen lassen.

Brockamp (Potsdam).

Husimi, Kôdi: Complementary notes to our previous work „Vibrating systems exposed to irregular forces“. Geophys. Mag. 9, 49—60 (1935).

Es wird besonders auf die Dispersion der Form $Q \Delta t + O(\Delta t^2)$ für $\Delta t = t' - t \rightarrow 0$ eingegangen. Vgl. vorstehendes Referat.

Brockamp (Potsdam).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: The nature of microseisms of local type. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 13, 729—738 (1935).

Unter dieser Mikroseismik wird eine Bodenunruhe von 10—30 sec und einer Amplitude von wenigen μ bis zu Bruchteilen eines Millimeters verstanden, verursacht durch lokale atmosphärische Schwingungen. Es zeigt sich, daß im Falle äußerer Schichtung der Erde, wenn die Rigidity in der unterlagernden Schicht nicht zu groß ist gegenüber der auflagernden, durch atmosphärische Pulsation lokale Mikroseismik entsteht, die aber wegen der starken Energiestreuung in die untere Schicht sehr klein ist. Falls das untere Mittel nicht extrem rig ist, würde, da die Energiestreuung in die Luft verschwindend klein ist, bei Resonanz zu große Bodenunruhe auftreten. Da auch die Dämpfung in der oberen Schicht nicht sehr groß sein dürfte, folgt, daß es sich bei der lokalen mikro-seismischen Bodenunruhe nicht um freie Schichtschwingungen handeln kann, es sei denn, daß keine Resonanz der Schichtschwingungen mit den atmosphärischen Pulsationen eintritt.

Brockamp (Potsdam).

Sezawa, Katsutada: Elastic waves produced by applying statical force to a body or by releasing it from a body. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo **13**, 740—749 (1935).

Wenn in einem elastischen Körper durch äußere Kräfte Spannungen entstehen, so kann diese statische Energie nur zum Teil als Wellenenergie weitergeleitet werden. Ein Teil der statischen Energie wird bei Auslösung der Spannung verbraucht.

Brockamp (Potsdam).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: The effect of sharpness of discontinuities on the transmission and reflection of elastic waves. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo **13**, 750—755 (1935).

Für den Fall, daß zwischen zwei Schichten mit der Dichte und mit der Righeit $\varrho_0, \mu_0, \varrho_2, \mu_2$ eine Schicht mit veränderlicher Righeit $\mu_1 = Ax$ liegt, wird der Anteil der reflektierten und gebrochenen Wellen in Abhängigkeit von der Wellenlänge untersucht. Für Wellen, die im Verhältnis zur Mächtigkeit der Zwischenschicht klein sind, wird wenig Energie reflektiert. Der größte Energieanteil wird in die untere Schicht hineingebrochen. Je kürzer die einfallenden Wellen, um so stärker schwankt die Amplitude der reflektierten Welle; die Righeit der Zwischenschicht bestimmt diesen Verlauf.

Brockamp (Potsdam).

Thorade, H.: Beständigkeit und Streuung bei Strömen. Ann. Hydrogr. **64**, 13—23 (1936).

Sollen Strombeobachtungen irgendeinen Wert haben, so ist es nötig, daß eine große Anzahl vorliegen, da einige wenige Messungen infolge der zahlreichen Schwankungen ein ganz falsches Bild der Strömungsverhältnisse geben würden, wie an Beispielen gezeigt wird. Als Maß der „Beständigkeit“ eines Stromes den Quotienten aus vektorieller und skalarer Geschwindigkeit zu wählen, ist verfehlt, da dieses Maß nur die Schwankungen der Richtung mißt. Wenn sich die Beobachtungen gemäß dem Gaußschen Fehlergesetz verteilen, so wird als Maß der Streuung der „Streukreis“ vorgeschlagen, in den etwa $\frac{2}{3}$ aller Beobachtungen fallen. Der Streuhalbmesser r ist

$$r = \sqrt{\Delta w^2 + w^2 \Delta \alpha^2},$$

wo w die Stromgeschwindigkeit, α seine Richtung.

Haurwitz (Toronto).

Jánossy, Ludwig: Eine neue Zählrohr- und Koinzidenztheorie. Z. Physik **99**, 369—404 (1936).

Während die früher von Tuwim entwickelte Zählrohr- und Koinzidenztheorie (dies. Zbl. **1**, 188; **2**, 319; **6**, 96; **4**, 143) von der Voraussetzung ausgeht, daß die Richtungsverteilung der Höhenstrahlen aus der ursprünglichen Isotropie durch Absorption ohne merkliche Streuung bei dem Durchgang der Strahlen durch die Atmosphäre entsteht, wobei also die Richtungsverteilung in der Form $R = N_0 e^{-\mu H \sec \vartheta}$ angesetzt werden kann, löst der Autor die Aufgabe, die Richtungsverteilung der Höhenstrahlung aus direkt zugänglichen Meßgrößen, die mittels eines einzigen Zählrohres oder eines Zählerpaares erhalten sind, ohne wesentlich einschränkende Voraussetzungen zu bestimmen.

J. N. Hummel (Berlin).

Wagner, A.: Zur Theorie des täglichen Ganges der Windverhältnisse. Anz. Akad. Wiss., Wien **1936**, 25—27 (Nr. 4).

Portig, W.: Gleichzeitige Temperatur- und Luftdruckänderungen in der freien Atmosphäre. Beitr. Physik frei. Atmosph. **23**, 85—94 (1936).

● Ertel, H.: Advektiv-dynamische Theorie der Luftdruckschwankungen und ihrer Periodizitäten. (Veröff. d. Meteorol. Inst. d. Univ. Berlin. Hrsg. v. H. Ertel u. H. v. Ficker. Bd. **1**, H. **1**.) Berlin: Dietrich Reimer, Andrews & Steiner 1936. 31 S. RM. 2.—

Um eine Theorie einer raumzeitlichen Änderung des Luftdruckfeldes aufzustellen, werden advektive und dynamische Effekte in gleicher Weise berücksichtigt, die als aufgezwungene irreversible Deformation angesehen werden. Das ganze hat die Form einer inhomogenen partiellen Differentialgleichung. Die Lösung geschieht durch Kugel-

funktionsentwicklungen. Sie lassen folgendes erkennen: West-Ost-Wanderung der Luftdruckgebilde; Entwicklungsphasen zusammengesetzter Depressionen; harmonische Periodenverhältnisse gewisser Luftdruckwellen; Symmetriepunkte; Verzerrung der Symmetriepunktkurven; westwärts wandernde 36 tägige Luftdruckwelle. Weiterhin zeigt die Lösung ein diskretes permanentes Periodenspektrum der Luftdruckschwankungen mit den bisher entdeckten und auch noch nicht entdeckten Perioden. *Hänsch.*

Dubuk, A. F.: About the calculation of the horizontally stratified wet air full energy of instability. *J. Geophys.*, Moskau 5, 466—486 u. engl. Zusammenfassung 486 (1935) [Russisch].

Following the Margules' idea the author calculates the variation δk of the full kinetic energy of the upsetting wet air masses. The calculations are made firstly with not quite exact definition of equivalent temperature due to Robich. The conditions for the maximum value of δk are constructed and the nomogram is worked out which makes it possible to calculate this maximum value. Than the formulae are given for δk in the case of the more exact definition of equivalent potential temperature according to Rossby.

I. Kiebel (Leningrad).

Dubuk, A. F.: Eddy motions in the free atmosphere. *J. Geophys.*, Moskau 5, 487—497 u. engl. Zusammenfassung 497—498 (1935) [Russisch].

The mean vertically directed flow M of air masses in turbulent motion is taken in account. The displacements are supposed to be adiabatic and some suppositions as to the mechanism of mixing are made; the author comes than to the formula $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} A \frac{\partial \ln \theta}{\partial z}$ with t = time, z = vertical coordinate, ϱ = density, θ = potential temperature, A = mean value of the quantity $m_1 h$ where m_1 is the mass of ascending particles only and h — the height of ascending. The equations of mixing of any substance (particular potential temperature) are constructed. Exner's equation is applied than for the rough calculation of A and the formula is given: $A = N W_1 \frac{1}{\sqrt{3g \frac{\partial \ln \theta}{\partial z}}}$

where N = quantity of mass being displaced upwards in unit of time over unit of horizontal surface and being exchanged for the air of higher levels, W_1 = average initial value of vertical speed of the ascending masses.

I. Kiebel (Leningrad).

Dedebant, G., und Ph. Wehrlé: Eine hydrodynamische Theorie der allgemeinen Luftzirkulation. *Meteorol. Z.* 52, 477—486 (1935).

Ausführliche Darlegung der bereits früher angekündigten Theorien der Verff. für die Sonnenrotation und die irdische allgemeine Luftzirkulation (vgl. Zbl. Mech. 2, 415 u. 3, 335), welche von der Bedingung minimaler zerstreuter mechanischer und thermischer Energie ausgehen.

W. Tollmien (Göttingen).

Tamás, Zoltán: Koordinatenberechnung aus dem Einschneiden mittels einer Doppelmaschine. *Österr. Z. Vermessgswes.* 34, 1—6 u. 26—32 (1936).

Herrmann, Karl: Die Anwendung einmal gebrochener Strahlen bei der Kleintriangulierung. *Allg. Vermessg-Nachr.* 48, 265—276 (1936).

Da Costa Lobo, F.: Projection centrale avantageuse pour la représentation des cinq continents à l'intérieur d'un cercle. *Bull. géodés.* Nr 45, 56—60 (1935).

Tardi, P.: Sur le calcul rigoureux des déformations angulaires dans les représentations planes de l'ellipsoïde terrestre. *Bull. géodés.* Nr 45, 60—71 (1935).

Schubert, Alfred: Die Bestimmung des zulässigen Querfehlers in Polygonzügen. *Z. Vermessgswes.* 65, 369—371 (1936).

Kasper, H.: Beitrag zur Gewichtsbestimmung in schematischen Triangulierungsketten. *Z. Vermessgswes.* 65, 372—378 (1936).

Weyh: Das verbesserte Ellingsche Flächenrechnungsverfahren. *Z. Vermessgswes.* 65, 379—380 (1936).